

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M.Eng.

PAR
HOSSAINI NIZAR

SIMULATION DES PROBLÈMES DE BRIS DE BARRAGE
PAR DES SOLVEURS DE RIEMANN

MONTREAL, LE 31 MARS 2003

© droits réservés de Hossaini Nizar

CE PROJET A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Azzeddine Soulaïmani, directeur de mémoire

Département de génie mécanique à l'École de Technologie Supérieure

M. Louis Lamarche, président de jury

Département de génie mécanique à l'École de Technologie Supérieure

M. Tung T. Quach, Ingénieur, chef d'équipe

Barrages et ouvrages civils, Hydro Québec

IL A FAIT L'OBJET D'UNE PRÉSENTATION DEVANT JURY

LE 28 FÉVRIER 2003

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier sincèrement mon directeur de recherche Mr Azzeddine Soulaïmani. Les nombreux conseils qu'il m'a prodigués, ont été essentiels pour la complétion de ce projet. Avec générosité et bienveillance, Mr. Soulaïmani m'a inspiré à chercher et à apprendre. Pour cela, et pour bien d'autres choses, je lui exprime ma plus profonde gratitude.

Je remercie vivement Mr. Lamarche, d'avoir accepté de présider le jury. À Mr. Quach, j'offre mes remerciements de m'avoir fait l'honneur de participer à l'évaluation de ce travail.

Je voudrais également remercier Mr. Andrew Liddiard pour son aide précieuse, et pour le temps qu'il m'a accordé.

Un grand remerciement à toute l'équipe de recherche GRANIT, et en particulier mes chers amis Amine, et Riadh.

Je remercie enfin mes parents qui m'ont inculqué le sens de l'appartenance et celui de l'éducation.

SIMULATION DES PROBLÈMES DE BRIS DE BARRAGE

PAR DES SOLVEURS DE RIEMANN

Nizar Hossaini

SOMMAIRE

Les inondations provoquées par des bris de barrages, mènent souvent à des dégâts matériels, et à de grandes pertes de vies humaines. C'est pourquoi, des efforts considérables ont été fournis ces dernières années, afin d'aboutir à des solutions adéquates à ce type de problèmes.

Au cours de ce travail, un code numérique a été développé pour la simulation des écoulements à surface libre, capable de s'adapter à des géométries, simples ou complexes. Le modèle mathématique est basé sur les équations en eaux peu profondes (Shallow water), dans leur forme conservative.

La méthode de Galerkin discontinue est utilisée pour la discrétisation dans l'espace et dans le temps du système d'équations.

Le problème de Riemann est résolu en adoptant plusieurs approches pour évaluer le flux numérique. Le schéma utilisé fait partie de la famille des méthodes décentrées (Upwinding) où plusieurs approximations de la solution de Riemann ont été implémentées : La méthode 'HLL', la méthode 'HLLC' qui est une correction apportée au schéma 'HLL', développée pour étudier l'influence des ondes intermédiaires, et enfin, la méthode 'Weighted Average Flux', dite 'WAF'. Nous avons aussi fait appel à la méthode 'Lax-Friedrichs' qui fait partie de la famille des méthodes centrées.

Certains problèmes classiques, nous ont servi de tests, dans le but de s'assurer de la fiabilité du code, avant de procéder à un traitement d'un cas réel. Le code a réussi avec succès à traiter les différents tests de validation. Le traitement du cas réel a nécessité l'introduction d'une nouvelle procédure dans la résolution du problème dû à la présence du phénomène des bancs couvrant – découvrant. Les résultats obtenus sont encourageants et une amélioration peut encore être apportée à la procédure de résolution.

SIMULATION OF THE DAM BREAK PROBLEMS

Nizar Hossaini

ABSTRACT

The floods caused by dam break problems, often lead to property damages, and great losses of human lives. That's why considerable efforts were provided these last years, so as to get smart solutions within this type of problems.

In this work, a numerical code was developed for the simulation of free surface flows, able to be adapted to simple or complex geometries. The mathematical model is based on the shallow water equations, in their conservative form.

The discontinuous Galerkin method is used for the discretization in space and time of the equation system.

The resolution of the Riemann problem is performed by adopting several approaches in evaluating the numerical flux. The used diagrams belong to the family of the Upwinding methods where several approximations of the solution of the Riemann problem were implemented: the "HLL" and the "HLLC" Riemann solver which is a correction version of the "HLL" method, developed to study the influence of the intermediate waves, and finally, the "Weighted Average Flux" method. We also called upon the "Lax-Friedrichs" method which belongs to the family of the centred methods.

Some traditional problems were used as benchmark tests to insure the reliability of the code, before carrying out a treatment of a real case. The code succeeded in treating the various validation tests. the treatment of the real case required the introduction of a new procedure in the resolution of the problem due to the presence of the phenomenon of the covering - discovering benches. The results obtained are encouraging and more improvements could be made in the future works.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
REMERCIEMENTS	iii
SOMMAIRE	iv
ABSTRACT	v
LISTE DES FIGURES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Introduction :	1
1.2 Écoulement à surface libre :	1
1.2.1 Loi de conservation :	4
1.2.2 Écoulement à surface libre :	5
1.3 Les équations d'eaux peu profondes :	8
1.4 Problème de bris de barrage :	12
1.5 Les équations de Saint Venant :	14
1.6 Objectifs et plan du mémoire :	15
CHAPITRE 2 MÉTHODOLOGIE ET PROBLÈME DE RIEMANN	17
2.1 Introduction :	17
2.2 Méthode conservative :	18
2.3 La méthode de Galerkin discontinue :	19
2.4 Formulation numérique :	19
2.5 Conditions aux limites :	25
2.6 Application d'un débit :	26
2.7 Régimes d'écoulement :	27
2.8 Pas de temps et condition de stabilité :	28
2.9 Schémas de discrétisation dans le temps :	29
2.9.1 Le schéma d' Euler :	29
2.9.2 Schéma de Runge-Kutta :	31
2.10 Le problème de Riemann :	31
2.10.1 Méthode de 'Godunov Upwind' :	34
2.10.2 La méthode 'Lax-Friedrichs' :	35
2.10.3 La méthode 'HLL' :	36
2.10.4 La méthode 'HLLC' :	39
2.10.5 La méthode Weighted Average Flux, 'WAF' :	40

CHAPITRE 3	IMPLÉMENTATION ET RÉSULTATS	44
3.1	Introduction	44
3.2	Implémentation :	44
3.3	Problème de barrage standard :	46
3.3.1	Le cas 1D :	46
3.3.2	Problème de bris de barrage en deux dimensions :	52
3.4	Problème de bris de barrage circulaire :	59
3.5	Problème du réservoir, avec un canal incliné de 45° :	72
3.6	Problème de bris de barrage avec un lit sec :	88
CHAPITRE 4	CAS RÉEL : L'ESTACADE DE BORDEAUX	92
4.1	Introduction :	92
4.2	Développement du terme source :	94
4.3	Conditions aux limites :	99
4.4	Traitement des zones sèches :	100
4.5	Collecte des résultats expérimentaux :	101
4.6	Résultats et comparaison :	102
CONCLUSION	107
ANNEXE I	RAPPELS ET DÉFINITIONS	110

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Convention des coordonnées pour l'écoulement à surface libre..... 6
Figure 2	Écoulement avec une surface libre, pour une section y fixe..... 6
Figure 3	Conditions initiales du problème de bris de barrage..... 12
Figure 4	Évolution dans le temps du problème de bris de barrage 13
Figure 5	Section d'une rivière : notation des équations de Saint-Venant 14
Figure 6	Condition d'interface entre deux éléments triangulaires adjacents 22
Figure 7	Discretisation spatiale du problème. 22
Figure 8	Application d'un débit à l'entrée 27
Figure 9	Illustration des données initiales du problème de Riemann..... 32
Figure 10	Les modèles d'ondes possibles dans la solution du problème de Riemann..... 34
Figure 11	Structure de la solution du problème de Riemann aux frontières de l'élément. 35
Figure 12	Structure des ondes intermédiaires 37
Figure 13	Structure de l'approche HLLC..... 39
Figure 14	Les poids W_K du schéma WAF pour un système de trois équations. 42
Figure 15	Fenêtre du visualisateur « Compaq Array Visualizer ». 45
Figure 16	Conditions initiales d'un problème de bris de barrage standard..... 46
Figure 17	Barrage standard : Profondeur : La méthode Lax-Friedrichs 47
Figure 18	Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode Lax-Friedrichs..... 47
Figure 19	Barrage standard : Profondeur : La méthode HLL 48
Figure 20	Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode HLL..... 48
Figure 21	Barrage standard : Profondeur : La méthode HLLC..... 49
Figure 22	Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode HLLC 49
Figure 23	Barrage standard : Profondeur : La méthode WAF 50
Figure 24	Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode WAF..... 50
Figure 25	Barrage standard – 2D – Conditions initiales. 53
Figure 26	Barrage standard – 2D, profondeur, $t_s = 30.0$ sec..... 53
Figure 27	Barrage standard – 2D – profil de vitesse, $t_s = 30.0$ sec..... 54
Figure 28	Les formes de maillage triangulaire adoptées au cours de la simulation..... 55
Figure 29	Barrage standard 2D, méthode Lax-Friedrichs - Effet du maillage, $t_s=30.56$
Figure 30	Barrage standard 2D, méthode HLL - Effet du maillage, $t_s=30$ sec..... 56
Figure 31	Barrage standard 2D, méthode HLLC - Effet du maillage, $t_s=30$ sec 57
Figure 32	Barrage standard 2D, méthode WAF - Effet du maillage, $t_s=30$ sec..... 57
Figure 33	Conditions initiales du problème de bris de barrage circulaire..... 59
Figure 34	Barrage circulaire, $t_s = 0.4$ sec..... 60
Figure 35	Barrage circulaire, $t_s = 0.7$ sec..... 61
Figure 36	Barrage circulaire, $t_s = 1.4$ sec..... 61
Figure 37	Barrage circulaire, $t_s = 3.5$ sec..... 62
Figure 38	Barrage circulaire, $t_s = 4.7$ sec..... 62

Figure 39	Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (a), $t_s = 3.5\text{sec}$	63
Figure 40	Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (a), $t_s = 4.7\text{sec}$	63
Figure 41	Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (b), $t_s = 3.5\text{ sec}$	64
Figure 42	Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme(b), $t_s = 4.7\text{ sec}$	64
Figure 43	Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (c), $t_s = 3.5\text{ sec}$	65
Figure 44	Barrage circulaire – maillage triangulaire - forme (c), $t_s = 4.7\text{ sec}$	65
Figure 45	Barrage circulaire - maillage triangulaire forme (d), $t_s = 3.5\text{ sec}$	66
Figure 46	Barrage circulaire – maillage triangulaire forme (d), $t_s = 4.7\text{ sec}$	66
Figure 47	Barrage circulaire, vue de dessus, réalisée par « Tecplot » - $t_s = 4.7\text{ sec}$..	67
Figure 48	Barrage circulaire – maillage aléatoire – Visualisation	67
	des vecteurs vitesse, $t_s = 3.5\text{ sec}$	67
Figure 49	Barrage circulaire - Maillage rectangulaire, $t_s = 4,7\text{sec}$	69
Figure 50	Barrage circulaire - Maillage forme (a), $t_s = 4,7\text{sec}$	69
Figure 51	Barrage circulaire - Maillage forme (b), $t_s = 4,7\text{sec}$	70
Figure 52	Barrage circulaire - Maillage forme (c), $t_s = 4,7\text{sec}$	70
Figure 53	Barrage circulaire - Maillage aléatoire, forme (d), $t_s = 4,7\text{sec}$	71
Figure 54	Vue plane du profil de l'entrée	72
Figure 55	Géométrie du réservoir vue dans le plan $x - y$	73
Figure 56	Photos de l'expérience : Vu en amont (a) et du dessus (b) de la section de courbure.....	76
Figure 57	Problème du réservoir – conditions initiales.....	76
Figure 58	Résultat de la simulation après 0.5 sec	77
Figure 59	Visualisation du niveau d'eau (a), et de la vitesse(b), à la sortie.....	77
	du réservoir après 0.5 sec	77
Figure 60	Résultat de la simulation après 4 sec	78
Figure 61	Visualisation du niveau de la propagation de l'onde après 4 secondes	78
Figure 62	Visualisation de la vitesse de propagation de l'onde auprès de la courbure de 45° après 4 secondes de temps de simulation.	79
Figure 63	Résultat de la simulation après 40 sec	79
Figure 64	Visualisation du niveau de la propagation de l'onde après 40 secondes ..	80
Figure 65	Visualisation du contour de la surface libre dans le canal incliné	80
Figure 66	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°1.....	81
Figure 67	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°2.....	81
Figure 68	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°3.....	82
Figure 69	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°4.....	82
Figure 70	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°5.....	83
Figure 71	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°6.....	83
Figure 72	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°7.....	84
Figure 73	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°8.....	84
Figure 74	Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°9.....	85
Figure 75	Définition de l'inclinaison de la surface libre.....	87
Figure 76	Différence du niveau d'eau entre la jauge n°5 et la jauge n°7.	87
Figure 77	Problème de barrage dans le cas d'un lit sec.	89
Figure 78	Problème de bris de barrage à lit sec, profil de la Profondeur – $t_s = 0.6\text{se}$	90

Figure 79	Problème de bris de barrage à lit sec, profil de la vitesse – $t_s = 0.6\text{sec}$	90
Figure 80	Problème de bris de barrage à lit sec, profil du débit – $t_s = 0.6\text{sec}$	91
Figure 81	Dimension de la rivière vue de haut dans le plan x-y.	92
Figure 82	Visualisation de la variation du fond de la rivière	93
Figure 83	Nouvelle distribution des éléments, et leur sens de connectivité.....	93
Figure 84	Illustration de l'angle θ	95
Figure 85	Géométrie triangulaire à éviter dans un maillage d'éléments finis.....	97
Figure 86	Représentation de la fonction continue $z(x,y)$ par une fonction d'interpolation linéaire pour un élément triangulaire.	99
Figure 87	Illustration des zones sèches et mouillées.....	100
Figure 88	Nouvelle frontière solide pour les éléments mouillées	101
Figure 89	Collecte des résultats expérimentaux	101
Figure 90	Acoustic Duppler Current Profiler, 'ADP'	102
Figure 91	Profil de vitesse autour de l'île près de la sortie	104
Figure 92	Observation du phénomène de la propagation de l'onde le long de la rivière.....	106

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Barrage ordinaire en 1D, temps de calcul pour une simulation de 30 sec.. 52
Tableau II	Comparaison de la durée de la simulation entre un pas de temps constant et variable. 58
Tableau III	Barrage circulaire, temps de calcul pour une simulation de 4.7 sec..... 71
Tableau IV	Coordonnées des points formant la géométrie du réservoir..... 74
Tableau V	Coordonnées des neufs jauges de la figure 55..... 74
Tableau VI	Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux..... 103

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Introduction :

De nos jours, les méthodes de calculs, aussi bien théorique que pratique, sont d'une grande utilité en ingénierie. Le point de départ de ces méthodes, est un modèle mathématique dont la forme et l'origine dépendent en particulier du problème étudié.

Dans le domaine de la mécanique des fluides, ces modèles consistent en des équations aux dérivées partielles avec des conditions initiales et des conditions aux limites.

La résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires pour le cas d'un domaine complexe est loin d'être une tâche facile. Il est important que le chercheur ait des connaissances très profondes de la théorie de base, et les différents processus qui s'y présentent.

Les méthodes numériques utilisées dans la résolution de ce type d'équations ont été développées vers la deuxième moitié du vingtième siècle. L'intérêt a été porté sur l'étude de la stabilité, l'efficacité et la convergence de la méthode numérique. Nous citons ici quelque noms qui ont marqué la théorie des lois de conservation hyperbolique, comme « Wendroff », « Godunov », « Von Newmann » et « Lax » [19].

Jusqu'à présent, les modèles les plus populaires en mécanique des fluides sont développés selon l'approche eulérienne du mouvement. En mécanique des solides, l'approche lagrangienne s'avère plus populaire.

1.2 Écoulement à surface libre :

Les écoulements à surface libre apparaissent dans de nombreuses situations d'intérêt pratique.

L'étude des problèmes liés à l'environnement comme les inondations des rives et les bris de barrages, présentent une gamme importante parmi de nombreux problèmes, qui suscitent l'intérêt des chercheurs scientifiques dans ce domaine.

La modélisation mathématique des écoulements à surface libre est basée sur des équations appelées « équations d'eaux peu profondes », connu aussi sous le nom de « Saint-Venant » dans le cas unidimensionnel. La formulation repose sur un élément clé qui consiste à supposer un champ de pression hydrostatique, c'est à dire, une variation linéaire de la pression en fonction de l'élévation. L'hypothèse relève de l'effet négligeable de la composante verticale de l'accélération sur la pression. Les équations qui y résultent sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, de type hyperbolique dépendantes du temps.

Dans cette section, nous faisons le point sur les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement. Nous procéderons par la suite, à dériver les équations « d'eau peu profonde » pour des domaines à élévations variables du lit. Les équations connues sous le nom de « Saint-Venant » seront exprimées sous forme différentielle et intégrale. Nous considérons à la fin de ce chapitre le modèle unidimensionnel pour les écoulements en rivières à section variable.

Avant d'introduire les équations de conservation, nous prenons le soin d'établir quelques conventions de notation utilisées fréquemment le long du rapport. Les coordonnées spatiales de référence sont notées par x , y et z , et la variable du temps par t . ϕ représente une fonction quelconque qui dépend du temps et de l'espace.

Les équations gouvernantes sont des équations aux dérivées partielles dans la plupart des situations. Pour cela, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\phi_t \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad \phi_x \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad \phi_y \equiv \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad \phi_z \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.1)$$

Nous faisons appel également aux notions de produit scalaire et vectoriel. Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs $U(u_1, u_2, u_3)$ et $V(v_1, v_2, v_3)$ s'écrit :

$$U.V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (1.2)$$

Le produit vectoriel est le suivant :

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} ; \quad (1.3)$$

Pour une fonction ϕ qui dépend des variables de l'espace, l'opérateur gradient est le vecteur :

$$grad \phi \equiv \nabla \phi \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (1.4)$$

L'opérateur de divergence s'écrit :

$$Div U \equiv \nabla . U \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \quad (1.5)$$

La section qui suit porte sur les principes de conservation physique, utilisés pour dériver les équations d'eaux peu profondes.

1.2.1 Loi de conservation :

Les lois locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, pour un fluide compressible, écrites sous forme différentielle, sont les suivantes :

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho V \otimes V + pI - \Pi] = \rho g \quad (1.7)$$

où :

$$\nabla \cdot (\rho V) = \text{div}(\rho V) = (\rho u)_x + (\rho u)_y + (\rho u)_z. \quad (1.8)$$

Avec :

V : vecteur vitesse ;

g : vecteur des forces de volume ;

p : pression.

Le terme $V \otimes V$ représente le produit tensoriel, I la matrice unité, et Π le tenseur des contraintes visqueuses. Leurs expressions sont respectivement :

$$V \otimes V = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} & \tau^{xz} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} & \tau^{yz} \\ \tau^{zx} & \tau^{zy} & \tau^{zz} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Pour le reste de cette étude, nous négligerons l'effet de la contrainte visqueuse.

L'équation (1.7) peut être écrite sous la forme intégrale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} (\rho V) dV = - \iint_{\Gamma} [V (n \cdot \rho V) + pn - n \cdot \Pi] d\Gamma + \iiint_{\Omega} \rho g d\Omega \quad (1.12)$$

Où Ω représente le volume de contrôle arbitraire d'un élément de fluide, et Γ son contour.

Il est parfois plus commode d'exprimer les équations avec des variables physiques, ou primitives (ρ, u, v, w, p). Lorsque les effets visqueux sont négligeables, et le terme de force de volume est retenu, nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0; \quad (1.13)$$

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{1}{\rho} p_x = g_1; \quad (1.14)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho} p_y = g_2; \quad (1.15)$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z = g_3; \quad (1.16)$$

1.2.2 Écoulement à surface libre :

Considérons un écoulement d'eau avec une surface libre sous gravité, dans un domaine tridimensionnel. La figure 1 présente la convention adoptée des coordonnées spatiales, où le plan (x,y) détermine le niveau horizontal, tandis que l'axe z définit la direction verticale, associée à la hauteur de la surface libre.

Le fond est défini par la fonction :

$$z = b(x, y) \quad (1.17)$$

La surface libre est définie par :

$$z = s(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t) \quad (1.18)$$

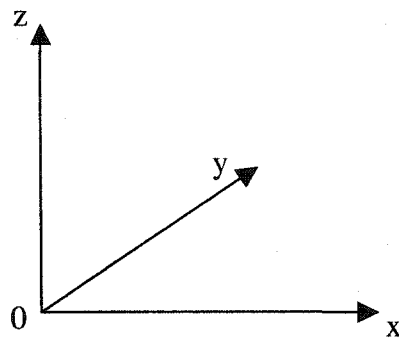


Figure 1 Convention des coordonnées pour l'écoulement à surface libre.

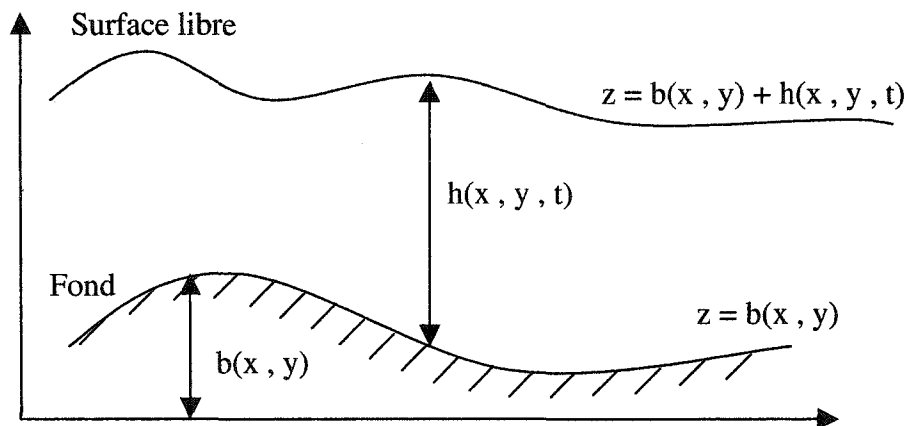


Figure 2 Écoulement avec une surface libre, pour une section y fixe.

La figure 2 présente la géométrie d'une situation simplifiée pour une position y donnée, où h représente la hauteur d'eau effective, qui indique la distance verticale entre le fond et la surface libre.

En supposant que la densité du fluide est constante, les équations (1.13), (1.14), (1.15) et (1.16) se simplifient :

$$u_x + v_y + w_z = 0 ; \quad (1.19)$$

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\rho} p_x ; \quad (1.20)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{1}{\rho} p_y ; \quad (1.21)$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z - g ; \quad (1.22)$$

Le vecteur des forces de volume est donné par $g = (0, 0, -g)$, où g représente l'accélération due à la gravité. ($g = 9.8\text{m/s}^2$)

Se donnant une condition initiale à $t = 0$, et se fixant des conditions aux limites, sur le fond, et sur la surface libre, la solution du problème repose sur la résolution du système d'équations (1.19) (1.20) (1.21) et (1.22), pour les inconnus p, u, v et w .

La difficulté dans la résolution de ce système repose sur la modélisation de la frontière. Étant donnée que la surface libre demeure inconnue, le domaine de résolution devient lui aussi inconnu, et de ce fait, la résolution du problème devient plus complexe. Ainsi, des théories ont été envisagées pour arriver à une simplification du problème. La première consiste à supposer que l'amplitude du niveau de la surface libre est petit par rapport à la longueur du domaine.

L'une des approximations adoptée dans ce travail consiste à ce que la profondeur d'eau est petite par rapport à la longueur d'onde, ou la courbure de la surface libre. Cette

supposition entraîne un problème de valeurs initiales non linéaire, qui est très souvent le cas à considérer dans la théorie des équations d'eaux peu profondes. En dépit des simplifications dans la dérivation des équations, la solution numérique des équations d'eaux peu profondes demeure une tâche ardue.

1.3 Les équations d'eaux peu profondes :

La première considération dans le développement des équations d'eaux peu profondes, est de supposer que la composante verticale de l'accélération $\frac{dw}{dt}$ est négligeable devant la force de gravité. Ainsi l'équation (1.22) devient :

$$p_z = -\rho g ; \quad (1.22)$$

Se donnant une condition dynamique sur la pression, et qui consiste à ce que la pression sur la surface libre est égale à la pression atmosphérique, considérée nulle, nous obtenons :

$$p = \rho g(s - z); \quad (1.23)$$

$$p_x = \rho g s_x ; \quad (1.24)$$

$$p_y = \rho g s_y ; \quad (1.25)$$

Les deux composantes dérivées de la pression par rapport à x et y sont indépendantes de z. Par conséquent, les composantes de l'accélération $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ le sont aussi. Puisque les composantes de la vitesse u et v sont indépendante de z, nous pouvons écrire $u_z = v_z = 0$. En vertu de ces conditions, et en utilisant les équations (1.24) et (1.25) dans les équations (1.20) et (1.21), ces deux dernières deviennent :

$$u_t + uu_x + vv_y = -gs_x ; \quad (1.27)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -gs_y; \quad (1.28)$$

Nous entamons ici une étape importante dans le développement des équations d'eaux peu profondes, où nous procédons à l'intégration de l'équation de continuité suivant z , entre le fond $z = b(x,y)$, et le niveau de la surface libre $z = s(x,y,t)$.

Ceci se traduit comme suit :

$$\int_b^s (u_x + v_y + w_z) dz = 0; \quad (1.29)$$

$$w|_{z=s} - w|_{z=b} + \int_b^s u_x dz + \int_b^s v_y dz = 0; \quad (1.30)$$

Pour simplifier les deux termes intégrales de l'équation, nous faisons appel à la formule de Leibniz qui est la suivante :

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} f(\phi, \alpha) d\phi = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{df}{d\alpha} d\phi + f(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} - f(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha}; \quad (1.31)$$

ce qui revient à écrire :

$$\int_b^s u_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz - u|_{z=s} s_x + u|_{z=b} b_x; \quad (1.32)$$

$$\int_b^s v_y dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz - v|_{z=s} s_y + v|_{z=b} b_y; \quad (1.33)$$

Dans le but de déterminer les expressions des deux premières composantes de l'équation (1.30), nous appliquons les conditions aux frontières sur la surface libre.

Considérons la frontière donnée par la fonction surface $\Psi(x,y,z,t)$, tel que :

Pour la surface libre :

$$\Psi(x,y,z,t) = z - s(x,y,t) = 0; \quad (1.34)$$

Pour le fond :

$$\Psi(x,y,z,t) = z - b(x,y) = 0 ; \quad (1.35)$$

Avec :

$$\frac{d}{dt} \Psi(x,y,z,t) = \Psi_t + u\Psi_x + v\Psi_y + w\Psi_z = 0 ; \quad (1.36)$$

l'application de l'équation (1.36) sur l'équation (1.34) donne :

$$(s_t + us_x + vs_y - w)|_{z=s} = 0 ; \quad (1.37)$$

Cette équation nous donne :

$$w|_{z=s} = (s_t + us_x + vs_y)|_{z=s} ; \quad (1.38)$$

En substituant l'équation (1.36) dans l'équation (1.35), on obtient :

$$(ub_x + vb_y - w)|_{z=b} = 0 ; \quad (1.39)$$

Donc :

$$w|_{z=b} = (ub_x + vb_y)|_{z=b} ; \quad (1.40)$$

En introduisant les équations (1.32), (1.33), (1.38) et (1.40) dans l'équation (1.30), nous obtenons :

$$(s_t + us_x + vs_y)|_{z=s} + (ub_x + vb_y)|_{z=b} + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz - u|_{z=s}.s_x + u|_{z=b}.b_x + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz - v|_{z=s}.s_y + v|_{z=b}.b_y = 0 ; \quad (1.41)$$

Après simplifications, l'équation (1.41) devient :

$$s_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz = 0 ; \quad (1.42)$$

Rappelons que u et v sont indépendant de z , et que $s = b + h$, et que $b_t = 0$. Ce qui nous mène à l'écriture suivante :

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0; \quad (1.43)$$

Cette équation représente la loi de conservation de la masse, écrite sous forme différentielle conservative.

Les équations de mouvements (1.20) et (1.21) peuvent aussi être exprimées sous forme différentielle conservative. Pour ceci, nous procédons à l'addition de l'équation (1.43) près multipliée par u , avec l'équation (1.27) près multipliée par h , et en utilisant la différentiation de la profondeur h :

$$h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} h^2 \right); \quad (1.44)$$

Nous aurons les équations de mouvement suivant x et y qui sont les suivantes :

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right)_x + (huv)_y = -ghb_x; \quad (1.45)$$

$$(hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right)_y = -ghb_y; \quad (1.46)$$

Les trois équations ainsi obtenues, (1.43), (1.45) et (1.46), peuvent être écrites en forme différentielle conservative en un vecteur d'équation :

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U); \quad (1.47)$$

$$\text{avec : } U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}; G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ hvu \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}; S(U) = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}; \quad (1.48)$$

Dans le système d'équation (1.47), le vecteur U est le vecteur des variables conservatives, $F(U)$ et $G(U)$ sont les vecteurs de flux, et $S(U)$ le vecteur terme source.

1.4 Problème de bris de barrage :

Le problème de bris de barrage est d'une considération physique importante, vue l'intérêt que lui portent les chercheurs scientifiques dans le domaine de l'hydraulique. Le problème dans sa version standard consiste en un canal horizontal rectangulaire et uniforme, au milieu duquel un mur est placé séparant deux niveaux d'eau initialement au repos.

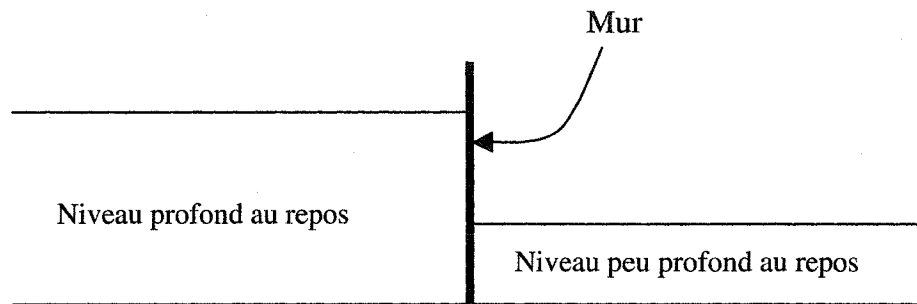


Figure 3 Conditions initiales du problème de bris de barrage.

Lorsque le mur ou le barrage s'effondre brusquement, deux dispositifs dominants émergent du processus sous forme d'ondes. Il y aura naissance de deux ondes dans l'emplacement du barrage, de façon centralisée. La première onde appelée onde de choc, se met en évidence en haussant le niveau d'eau à l'aval. Son sens de propagation est vers la droite. La seconde onde, à l'amont du barrage, se dirige vers la gauche en ayant l'effet de réduire le niveau de la surface libre de façon continue. Cette deuxième onde est appelée onde de raréfaction.

Ce système d'onde peut être approximé par les équations d'eaux peu profondes. Les deux phénomènes sont décrits dans la figure 4. Les conditions initiales d'un problème de bris de barrage standard sont représentées par la figure 4a. Après un effondrement brusque du barrage, les figures 4b et 4c, illustrent respectivement le niveau de la profondeur et le profil de vitesse à un instant t_* .

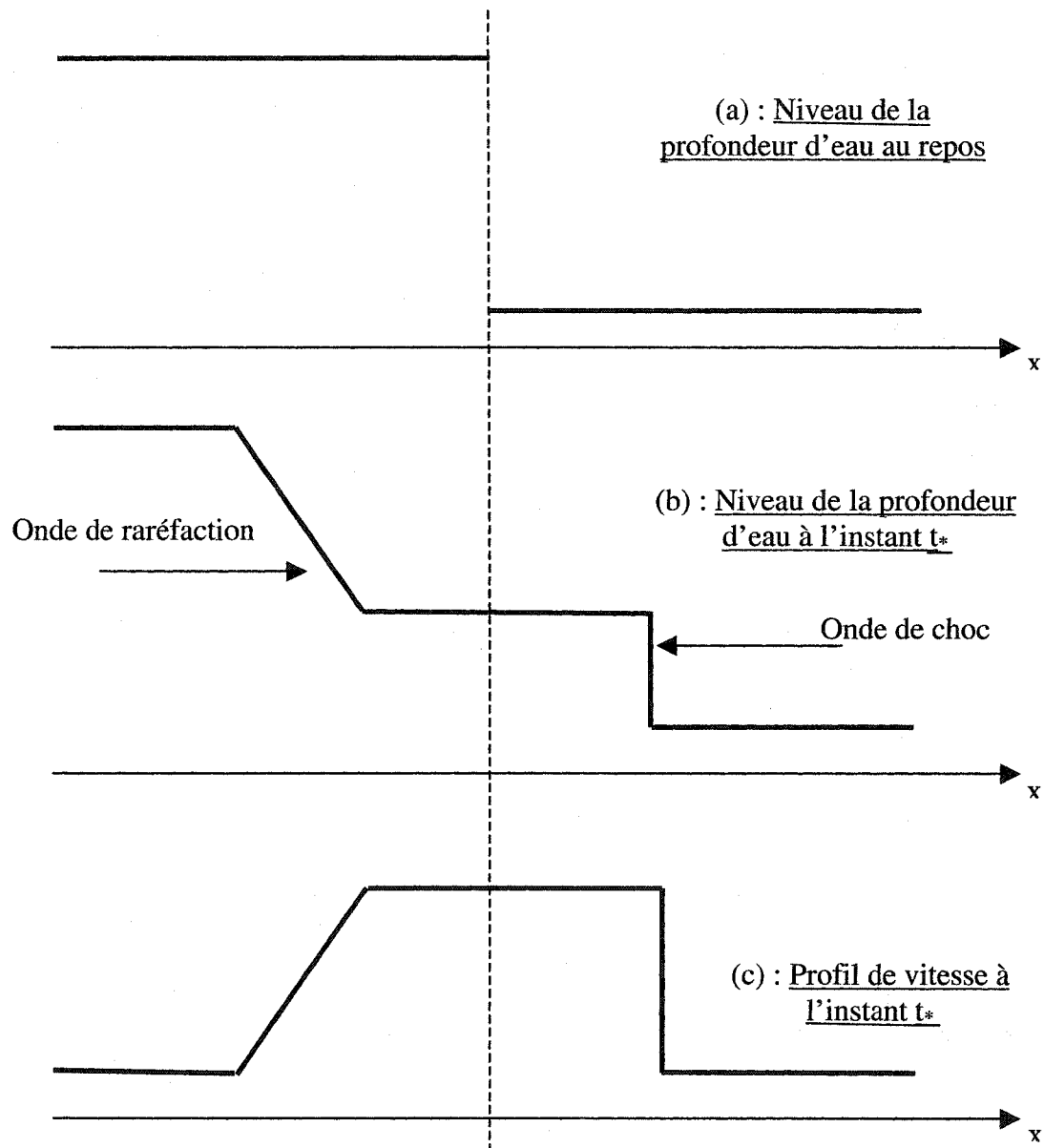


Figure 4 Évolution dans le temps du problème de bris de barrage

1.5 Les équations de Saint Venant :

Les équations de Saint-Venant sont utilisées pour la modélisation des écoulements dans les rivières. Elles sont données par :

$$W_t + (Wu)_x = 0; \quad (1.49)$$

$$(Wu)_t + (Wu^2)_x + gWh_x = gW(b_x - b_f); \quad (1.50)$$

La géométrie et les paramètres de l'équation sont illustrés dans la figure 5, qui représente une coupe d'une rivière à une position x fixe. Le paramètre W désigne la section mouillée de la rivière et est définie comme suit :

$$W = \int_0^{h(x)} r(x,z) dz; \quad (1.51)$$

où $r(x,z)$ est la largeur de la section, et $r(x,h) = B(x)$ est la largeur de la surface libre.

Le paramètre u représente la vitesse, b_f le facteur de friction (friction slope), tandis que b_x représente le terme du gradient qui surgit de la variation du fond de la rivière.

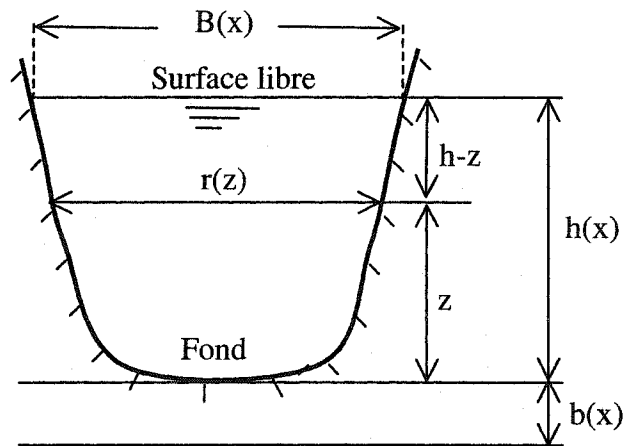


Figure 5 Section d'une rivière : notation des équations de Saint-Venant

En général, l'équation de quantité de mouvement dans le système des équations de Saint-Venant, ne peut être écrite sous forme conservative comme c'est le cas pour l'équation (1.47), car elle présente des difficultés théoriques et pratiques dans la définition du choc qui obéit aux conditions de Rankine-Hugoniot.

Pour contourner ce problème, il est possible de supposer que la discontinuité dans le cas où elle existe, soit faible, dans le sens où les sauts dans les discontinuités, sont petits. Ainsi, l'équation (1.50) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(Wu)_t + (Wu^2 + gWh)_x = gW(b_x - b_f) - ghW_x; \quad (1.52)$$

Durant ce chapitre, nous avons procédé à la dérivation des équations d'eaux peu profondes non linéaires, en deux dimensions. Une importance particulière a été accordée aux différentes suppositions adoptées dans la dérivation des équations. Ces dernières forment un axe central, sur lequel repose notre étude.

Pour des applications plus complexes, une autre dérivation de ces équations serait nécessaire.

1.6 Objectifs et plan du mémoire :

L'objectif principal de ce travail est le développement d'un code capable de simuler des écoulements issus des problèmes de bris de barrage, ainsi que l'étude des méthodes numériques pour la capture des chocs, et ce, en utilisant les équations 'd'eaux peu profondes'.

Pour ces fins, nous procédons dans un premier temps au développement de la méthode de Galerkin discontinue utilisée pour la discrétisation des équations d'eaux peu

profondes en deux dimensions avec des maillages non structurés. Nous abordons par la suite le problème de Riemann dont la résolution est approchée par quatre méthodes numériques appelées ‘solveurs de Riemann’ que nous avons implémentés. Il sera ensuite question de valider le code en l’appliquant à certains problèmes classiques de bris de barrage. La comparaison des résultats obtenus se fera à la lumière des résultats qui existent dans la littérature.

La dernière partie de ce rapport portera sur le traitement d’un cas réel.

CHAPITRE 2

MÉTHODOLOGIE ET PROBLÈME DE RIEMANN

2.1 Introduction :

Durant les deux dernières décennies, de considérables progrès ont été enregistrés pour arriver à la résolution des systèmes hyperboliques, comme par exemple, les équations d'Euler. Le schéma de Gudonov [13] de premier ou second ordre qui représente une solution du problème de Riemann de base a été utilisé pour la résolution numérique des équations hyperboliques vers la fin des années soixante. De plus amples détails sur l'aspect mathématique du problème sont présentés par Van Leer et Roe [30]. Actuellement, les méthodes développées sont largement utilisées en aérodynamique, et offrent plusieurs avantages dans la résolution des discontinuités. Graduellement, elles ont été étendues à d'autres problèmes physiques plus compliqués. Leur précision a conduit plusieurs chercheurs à les appliquer sur des systèmes hyperboliques, tels les équations d'eaux peu profondes, et non hyperboliques, tels les équations de Navier-Stokes.

Marshall et Méndez [20] sont les premiers à avoir rapporter une procédure générale pour la résolution exacte du problème de Riemann dans le cas du lit humide [28]. Ils ont appliqué la méthodologie développée par Godunov [13] pour les équations d'Euler pour la dynamique des gaz.

L'implémentation de cette approche étant très coûteuse, d'autres schémas efficaces ont été développés. Notamment Toro [28] qui a présenté la solution exacte du problème de Reimann, basé sur ses travaux précédents portant sur la dynamique des gaz compressibles. Cette approche réduit le problème à la résolution d'une équation algébrique non linéaire pour la profondeur de l'eau. Les autres variables de l'écoulement

sont déduites grâce à la structure complète de la solution exacte du problème de Riemann.

Dans cette section, nous présentons la méthode de Galerkin discontinue basée sur un schéma dit conservatif et monotone. Une partie de ce chapitre rapportera sur une discussion du flux de Godunov et au développement du solveur de Riemann. Certaines solutions approximatives du problème de Riemann, implémentées dans le code, sont également citées.

2.2 Méthode conservative :

La formulation mathématique des équations gouvernantes, ainsi que le schéma numérique pour la résolution des équations hyperboliques, deviennent des conditions primordiales, lorsque la solution peut contenir des discontinuités. Que la formulation du problème soit différentielle ou intégrale, il y a une variété de choix lors de l'initialisation des variables.

Un choix évident consiste à adopter des variables conservatives. La formulation basée sur des variables non conservatives échoue aux ondes de choc. Un récent travail effectué par Hou et LeFloch [15] montre que le schéma numérique s'il y a convergence, converge vers la solution de la nouvelle loi de conservation avec un terme source lorsque la méthode non conservative est utilisée. Ce terme source disparaît seulement si les ondes de choc ne sont pas présentes dans la solution. Le résultat classique établi par Lax et Wendroff [19] montre que la méthode numérique conservative, si elle converge, alors elle converge vers la solution faible de la loi de conservation. Toutefois, l'adoption d'un schéma conservatif devient primordial si les ondes de choc font partie de la solution.

2.3 La méthode de Galerkin discontinue :

La méthode de Galerkin discontinue « DGM » a fait son apparition dans la fin des années 70 pour résoudre les problèmes des écoulements compressibles contenant des chocs. La formulation est conservative, et la monotonie est assurée en abaissant convenablement l'ordre de base.

À la différence des autres méthodes d'ordres élevés, La méthode de Galerkin discontinue emploie différentes formes de maillages, se servant ainsi de la flexibilité de la géométrie dans la méthode des éléments finis.

Le présent travail est basé sur le travail de Cockburn et Shu [8], qu'ils ont effectué dans le cadre de l'étude de la discontinuité des élément finis pour des systèmes hyperboliques. La méthode « DGM » est encore récente pour des traitements de la diffusivité, et son application a été dernièrement étendue pour traiter les équations de Navier-Stokes en compressible [2] et [3]. La méthode utilise deux concepts très connus : celui de la méthode des éléments finis et celui de la méthode des volumes finis.

2.4 Formulation numérique :

Le modèle mathématique utilisé est basé sur les équations « d'eaux peu profondes » en deux dimensions. Ce modèle est obtenu en faisant la moyenne des équations de Navier-Stokes le long de la direction verticale.

L'équation d'eaux peu profondes en deux dimensions, sous forme différentielle strictement conservative, est la suivante:

$$U_t + f(U)_x + g(U)_y = S; \quad (2.1)$$

L'équation est définie sur un élément Ω appartenant au domaine d'étude.

Les indices t , x et y dénotent respectivement, le temps et les dérivées spatiales. Les vecteurs des variables dépendantes U , les flux f et g , ainsi que le terme source S sont définis comme suit :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} ; f = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} ; g = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} ; S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} ; \quad (2.2)$$

avec h le paramètre qui représente la profondeur, et u et v les deux composantes de la vitesse. S_0 est la pente du fond par rapport au plan horizontal, tandis que le paramètre S_f représente le terme de friction. Ce dernier peut être évalué par une formule empirique, celle de Manning ou de Chézy. Une étude a été menée par 'Soulaimani' et al. [24] dans le but d'identifier le coefficient de friction dans les équations d'eaux peu profondes.

En définissant un vecteur flux F par $F(U) = (f(U), g(U))$, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = S ; \quad (2.3)$$

Cette équation est définie sur un domaine où la répartition des éléments est arbitraire.

Soit W une fonction de pondération qui a la caractéristique suivante :

$$W = \sum N_i w_i ; \quad (2.4)$$

Procédant comme dans la formulation de la méthode de Galerkin standard, nous multiplions l'équation (2.3) par la fonction test W , et nous procédons à une intégrale sur un volume de contrôle Ω .

$$\int_{\Omega} W \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) \right) d\Omega = \int_{\Omega} W S d\Omega ; \quad (2.5)$$

Une intégration par partie, nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} w_i N_i \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} w_i \vec{n} \cdot F(U) d\gamma - \int_{\Omega} w_i \nabla \cdot N_i F(U) d\Omega = \int_{\Omega} w_i N_i S d\Omega ; \quad (2.6)$$

Si la fonction N_i est un polynôme d'interpolation constant et égale à 1, cela revient à écrire :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot F(U) d\gamma = \int_{\Omega} S d\Omega ; \quad (2.7)$$

Cette équation est valide pour n'importe quel volume de contrôle Ω .

Dans les problèmes dépendant du temps, il est aussi nécessaire d'intégrer par rapport au temps t .

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} U d\Omega \right) dt + \int_0^t \oint_{\Gamma} F(U) \cdot \vec{n} d\gamma dt = \int_0^t \int_{\Omega} S d\Omega dt \quad (2.8)$$

avec \vec{n} est le vecteur normale à la frontière Γ .

En supposant que U est constant par élément Ω (ou volume de contrôle), une simple discrétisation de l'équation (2.8) est donnée par :

$$A(U_e^{n+1} - U_e^n) = -\Delta t \sum_{j=1}^{nb} F_{n,j}^*(U_e, U_v) L_j + A S \Delta t ; \quad (2.9)$$

où A est l'aire de Ω , U_e^n est la solution à l'instant $n\Delta t$ (Δt : pas de temps). L'élément voisin Ω' est représenté par le vecteur U_v (figure 6)

F_{nj}^* est une approximation du flux à la frontière de l'élément qui est fonction des vecteurs U_i et U_v .

Le calcul dans chaque élément est effectué séparément, et la connexion entre les éléments est le résultat de la manière de calculer le flux F^* .

Ici, les conditions de frontières sont renforcées via un flux numérique de surface, qui apparaît dans l'équation (2.9). Ce flux est calculé aux frontières des éléments adjacents à partir de la valeur donnée de U .

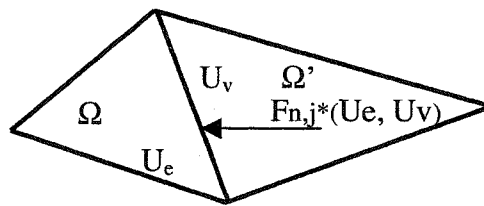


Figure 6 Condition d'interface entre deux éléments triangulaires adjacents

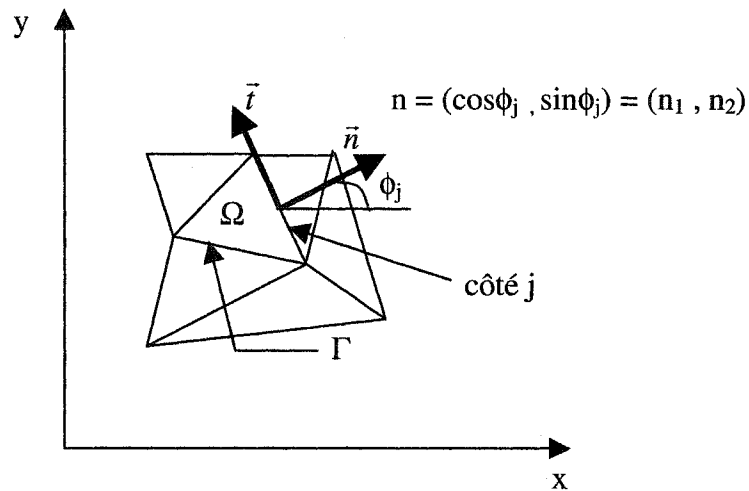


Figure 7 Discrétisation spatiale du problème.

où :

- A représente la surface de l'élément i ;
- U^{n+1} et U^n sont les variables hydrauliques aux temps t_{n+1} et t_n ;

- $F_{n,j}^*$ est le flux normal à travers l'interface j
- L_j est la longueur de l'interface ;
- Et n_b , le nombre de cotés de l'élément.
- ϕ_j est l'angle entre le vecteur n et l'axe des x .

Une simplification de l'expression du flux numérique $F_{n,j}^*$ revient à Toro [27], qui en 1997 a développé la forme intégrale en introduisant la notion de l'invariance rotationnelle dans les équations homogènes d'eaux peu profondes en deux dimensions. C'est une propriété importante qui peut être utilisée dans des simulations où les frontières du domaine ne sont pas alignées avec les directions cartésiennes. Ainsi, les équations d'eaux peu profondes homogènes en deux dimensions satisfont la propriété suivante :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = T^{-1} \cdot f(T(U)) ; \quad (2.10)$$

où T est la matrice de rotation, et T^{-1} son inverse. Leurs expressions sont données respectivement par :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 \\ 0 & -n_2 & n_1 \end{bmatrix} ; T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} ; \quad (2.11)$$

Nous procédons ici à démontrer la validité de cette propriété, en développant le terme de droite de l'équation (2.10). Ainsi, $T(U)$ s'écrit :

$$T(U) = [h, h\hat{u}, h\hat{v}]^T ; \quad (2.12)$$

Avec les composantes de vecteur vitesse \hat{u} et \hat{v} données par :

$$\hat{u} = u n_1 + v n_2; \hat{v} = -u n_2 + v n_1; \quad (2.13)$$

$$f(T(U)) = \left[h\hat{u}, h\hat{u}^2 + \frac{1}{2} g h^2, h\hat{u}\hat{v} \right]^T; \quad (2.14)$$

en appliquant l'inverse de la matrice de rotation T^{-1} sur le terme $f(T(U))$, nous obtenons :

$$T^{-1}(f(T(U))) = \begin{bmatrix} n_1 \left(h\hat{u}^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) - n_2 (h\hat{u}\hat{v}) \\ n_2 \left(h\hat{u}^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) + n_1 (h\hat{u}\hat{v}) \end{bmatrix}; \quad (2.15)$$

Ce qui permet de retrouver l'équation (2.10) et établir l'égalité suivante :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_{n,j}^* = f \cos \Phi_j + g \sin \Phi_j = T^{-1} \cdot f(T(U)); \quad (2.16)$$

L'utilisation de cette égalité, permet d'obtenir le schéma numérique suivant :

$$A(U^{n+1} - U^n) = -\Delta t \sum_{j=1}^{nb} T^{-1}(\Phi_j) f(\bar{U}) L_j + A S \Delta t; \quad (2.17)$$

où le vecteur $\bar{U} \equiv T(U)$ est le vecteur des variables hydrauliques obtenu par l'application de la matrice de rotation sur le vecteur original U , exprimé dans le repère locale (\vec{n}, \vec{t}) , où \vec{n} représente la direction normale à la frontière, dirigée de l'intérieur vers l'extérieur de l'élément, et \vec{t} le vecteur tangent, (figure 7).

Le problème en deux dimensions peut alors être résolu en terme de séries de problèmes locaux de Riemann en 1D dans la direction normale à l'interface de l'élément. Ce qui représente une généralisation pour la résolution des problèmes de bris de barrage.

Le schéma obtenu est un schéma explicite dans le temps, dont la résolution repose sur une évaluation appropriée du flux numérique à l'interface. L'adoption d'un pas de temps

suffisamment petit s'avère nécessaire pour satisfaire à la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) pour tous les éléments.

Le flux peut être obtenu comme une part de la solution du problème de Riemann local. Les schémas basés sur la résolution de ce type de problème sont connus sous le nom des schémas de Godunov [13]. Une brève discussion sur ce schéma, et sur le problème de Riemann sera également présentée dans ce chapitre.

2.5 Conditions aux limites :

Le calcul du flux à l'interface est une combinaison entre deux éléments adjacents dans un domaine d'étude. L'évaluation de ce flux pour les éléments de frontières nécessite un traitement spécial dans le but de garder la même formulation du schéma pour l'ensemble des éléments.

Nous avons alors considéré une couche d'éléments miroirs aux éléments placés au bord du domaine d'étude. Ainsi, chaque élément de frontière se verra attribuer un élément voisin fantôme, dont la présence n'aura aucun effet sur le nombre d'éléments total, et n'entre pas en considération dans les calculs. Deux types de conditions aux frontières peuvent ainsi être appliqués :

Pour les éléments situés à l'entrée et à la sortie du domaine, les mêmes caractéristiques d'un élément Ω seront attribuées à son élément miroir Ω' . Cela se traduit par l'écriture suivante :

$$\left. \begin{aligned} h^{\Omega'} &= h^{\Omega} \\ u_n^{\Omega'} &= u_n^{\Omega} \\ u_t^{\Omega'} &= u_t^{\Omega} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

où u_n^Ω et v_n^Ω sont les composantes normale et tangentielle locales de la vitesse de l'élément Ω . Cette application permet de garder une transmission du flux. C'est à dire, laisser entrer l'onde à l'entrée, et lui permettre de sortir du domaine si elle se trouve sur la frontière de sortie.

Par contre, pour les éléments de frontière solide, il y aura une réflexion dû à la présence de la paroi. Dans ce cas, la composante de la vitesse normale de l'élément Ω et son élément miroir Ω' seront égaux, mais de signes opposés, ce qui va empêcher le flux de passer à travers cette frontière. Cette condition s'écrit comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} h^{\Omega'} = h^{\Omega} \\ u_n^{\Omega'} = -u_n^{\Omega} \\ u_t^{\Omega'} = u_t^{\Omega} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

2.6 Application d'un débit :

On définit par q , un débit Q par unité de longueur L de l'entrée, et par α , l'angle que forme la normale à l'entrée avec l'abscisse des x (figure 8)

Les quantités de mouvements suivants x et y s'écrivent ainsi :

$$u.h=q.\cos(\alpha) \quad ; \quad v.h=q.\sin(\alpha) \quad (2.20)$$

Les cellules miroirs aux cellules de l'entrée se feront attribué les mêmes valeurs de quantité de mouvement et de profondeur.

Dans le cas où on désire fixer un niveau de profondeur sur une frontière du domaine, la

condition s'applique au niveau de l'évaluation du flux numérique, où il est question de fixer implicitement le niveau de profondeur, sans pour autant fixer la valeur d'un degré de liberté situé sur cette frontière.

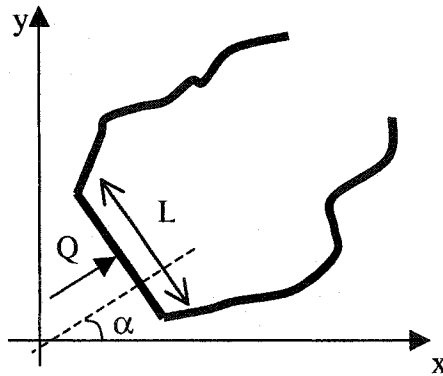


Figure 8 Application d'un débit à l'entrée

2.7 Régimes d'écoulement :

On définit le nombre de Froude suivant :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{c}} \quad (2.21)$$

Où V représente la vitesse de l'écoulement, et c la célérité exprimée comme suit :

$$c = g.h \quad (2.22)$$

Le rôle du nombre de Froude est de permettre le classement des écoulements comme suit :

(a) Écoulement fluvial :

On définit par un écoulement fluvial un écoulement lent, où le nombre de Froude est inférieur à 1. Ce type d'écoulement appelé aussi écoulement sous critique, se produit dans le cas d'une faible vitesse et une grande profondeur.

(b) Écoulement critique :

L'écoulement est critique ou tranquille lorsque le nombre de Froude est égale à 1.

(c) Écoulement torrentiel :

L'écoulement est dit torrentiel, supercritique ou rapide, si le nombre de Froude est supérieure à 1. Ce type d'écoulement se produit avec une grande vitesse et une faible profondeur.

2.8 Pas de temps et condition de stabilité :

La condition de stabilité générale est donnée par l'expression :

$$\Delta t = \frac{C_{CFL} \Delta L}{S_{\max}^n}; \quad (2.23)$$

où Δt représente le pas de temps, et C_{CFL} la condition CFL, ou « Courant-Friedrichs-Levy ». C'est un paramètre nécessaire à la stabilité d'un schéma numérique, lorsque compris entre 0 et 1. Dans la majorité des cas, ce paramètre est pris égale à 0.9.

ΔL est la longueur minimum des côtés d'un élément, et S_{\max}^n est la vitesse de propagation maximum, qui s'écrit comme suit :

$$S_{\max} = \|\vec{u}\| + \sqrt{gh} ; \quad (2.24)$$

Le coefficient C_{CFL} représente la fraction de la longueur de l'élément traversé par un signal de vitesse S , dans un pas de temps. La condition de stabilité exige que tous les signaux d'ondes, même ceux les plus rapides, ne traversent pas plus d'une cellule ou un élément de longueur L , par pas de temps.

2.9 Schémas de discrétisation dans le temps :

Dans plusieurs cas de simulations des problèmes de bris de barrage où la discontinuité fait toujours partie de la solution finale, cette dernière ne peut échapper à des oscillations surtout au bord de la discontinuité. C'est pourquoi nous avons testé deux schémas de discrétisation dans le temps, qui sont le schéma d'Euler, et le schéma Runge-Kutta de quatrième ordre.

2.9.1 Le schéma d' Euler :

La méthode d'Euler est une méthode numérique très simple, qui consiste à obtenir une courbe approchée d'une fonction, qui vérifie une équation différentielle du premier ordre, et une condition initiale.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad (2.25)$$

$$y(x_0) = y_0 ; \quad (2.26)$$

La méthode ne fournit pas une approximation de la fonction $y(x)$ en chaque point, mais plutôt en des points d'abscisses données. Ayant ainsi obtenu une solution pour le point (x_i, y_i) , une solution approchée en d'autres points peut être obtenue par interpolation.

Les nœuds choisis sont équidistants, c'est à dire $x_i = x_0 + ih$, (h : le pas). On note par $y(x_i)$, la valeur exacte, et par y_i la valeur approchée.

Du point de vue graphique, on se déplace d'un pas h en x , suivant le vecteur de pente $f(x,y)$. ce qui permet d'écrire l'égalité

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad (2.27)$$

Ce qui représente la pente en (x_i, y_i) de la courbe intégrale passant par ce point.

D'où :

$$y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i); \quad (2.28)$$

Du point de vue analytique, nous remplaçons dans l'équation (2.27) y' , ou $\frac{dy}{dx}$, par la formule de dérivation $\frac{y(x_h) - y(x)}{h}$. À la $i^{\text{ème}}$ étape, nous faisons l'approximation $y(x_i) \approx y_i$, qui nous permet d'écrire :

$$y(x_i+h) = y_i + h.f(x_i, y_i); \quad (2.29)$$

Ce qui suggère de nouveau l'équation :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n); \quad (2.30)$$

appelée équation aux dérivées partielles de la méthode d'Euler.

La formule est non symétrique, et est instable si le schéma de discrétisation spatiale est d'ordre supérieur ou égale à 2.

2.9.2 Schéma de Runge-Kutta :

Le schéma « Runge-Kutta » du quatrième ordre est, de loin, le schéma le plus souvent utilisé parmi les nombreux schémas de discrétisation en temps explicite. Il exige quatre évaluations de la fonction f par pas de calcul, et réserve un traitement identique à ces paramètres dans chaque pas de temps.

Le schéma explicite de Runge Kutta d'ordre 4, est le suivant :

$$k_1 = h f(x_n, y_n); \quad (2.31)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right); \quad (2.32)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right); \quad (2.33)$$

$$k_4 = h f\left(x_n + h, y_n + k_3\right); \quad (2.34)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5); \quad (2.35)$$

Cette méthode est simple, robuste et facile à programmer. Elle offre plus de précision que le schéma d'Euler, et est relativement rapide.

2.10 Le problème de Riemann :

Les équations d'Euler en compressible décrivant l'écoulement d'un gaz idéal est un exemple particulier d'un système hyperbolique. Lorsque la structure mathématique de la solution des équations est bien assimilée, ce système sert de repère principal pour tester de nouvelles méthodes numériques, et très particulièrement pour des problèmes de la dynamique des fluides ayant des caractères mathématiques similaires.

Le problème de Riemann est le problème de valeur initiale le plus simple pour des systèmes hyperboliques. Il est composé de deux états uniformes sur un domaine infini, séparés par une discontinuité à l'origine, (figure 9). Pour les équations d'eaux peu profondes, la solution exacte du problème de Riemann est bien connue, et consiste en une combinaison de trois ondes : onde de choc, onde de raréfaction, et un contact de discontinuité.

Le modèle numérique que nous avons développé, est basé sur la solution local du problème de Riemann pour mettre à jour la solution globale dans le temps. Nous avons adopté la même notation que celle de Toro (1992), pour désigner les constantes d'état. Ainsi, l'indice L (left) et R (right) représentent respectivement, les variables à gauche et à droite de la discontinuité. Les valeurs initiales du problème de Riemann sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Équation aux dérivées partielles :} \\ \text{Conditions initiales :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_t + F(U)_x = 0 ; \\ U(x,0) = U^0(x) = \begin{cases} U_L \text{ si } x < 0 ; \\ U_R \text{ si } x > 0 ; \end{cases} \end{array} \quad (2.36)$$

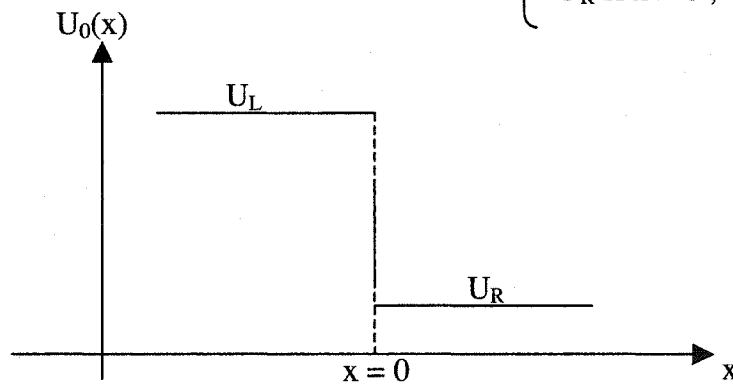


Figure 9 Illustration des données initiales du problème de Riemann

$$U_L = \begin{bmatrix} h_L \\ h_L u_L \\ h_L v_L \end{bmatrix}; U_R = \begin{bmatrix} h_R \\ h_R u_R \\ h_R v_R \end{bmatrix}; \quad (2.37)$$

Les états initiaux U_L et U_R comme décrits dans l'équation (2.37), sont des vecteurs constants, et représentent des conditions au temps $t=0$, à gauche de $x=0$, et à droite de $x=0$ respectivement.

Dans le problème de Riemann, les composantes de la vitesse u_L, v_L, u_R et v_R peuvent se distinguer être différentes de zéro; dans des problèmes de bris de barrage, ces paramètres sont pris égales à zéro, $u_L = v_L = u_R = v_R = 0$.

Quatre modèles d'ondes peuvent résulter du problème de Riemann, et sont illustrées dans la figure 10. le cas (a) est le cas où l'onde de raréfaction est située à gauche, tandis qu'à droite, on trouve une onde de choc; dans le cas (b), l'onde de raréfaction est située à droite, alors que l'onde de choc est placée à gauche. Pour les deux derniers cas, un seul type d'onde fait partie de la solution du problème de Riemann, et est placé aux deux côtés de l'axe désignant le temps. Dans le cas (c) l'onde à droite et à gauche est une onde de raréfaction, tandis que dans le cas (d), on retrouve uniquement l'onde de choc.

En général, les ondes de gauche et de droite sont des ondes de choc et de raréfaction, quant à l'onde du milieu, elle est une onde de cisaillement, le long de laquelle, la composante tangentielle v de la vitesse change de façon discontinue.

Le problème de Riemann est un outil de base pour une grande classe de méthodes numériques modernes, appelées « Upwind » ou « décentré ».

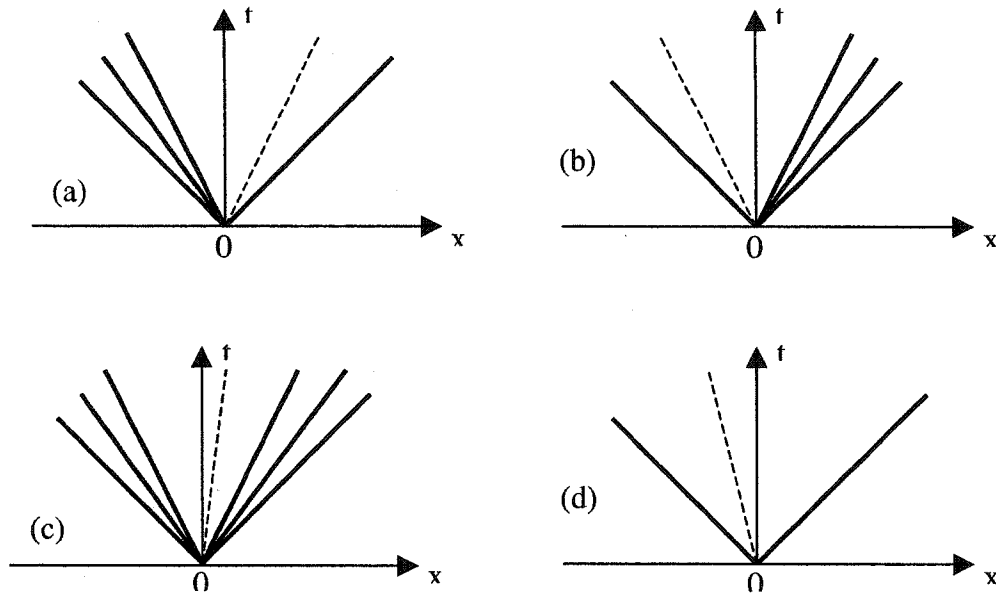


Figure 10 Les modèles d'ondes possibles dans la solution du problème de Riemann

2.10.1 Méthode de 'Godunov Upwind' :

Soit l'équation d'eaux peu profondes en une dimension augmentée :

$$U_t + F(U)_x = 0; \quad (2.38)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$U(x, t^n) = \begin{cases} U_i & , \quad x < x_{i+1/2} \\ U_{i+1} & , \quad x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (2.39)$$

La formule conservative mise à jours, de cette équation est :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}]; \quad (2.40)$$

où $F_{i+1/2}$ est le flux à l'interface correspondant à la frontière $x=x_{i+1/2}$ entre les cellules i et $i+1$, comme le montre la figure suivante :

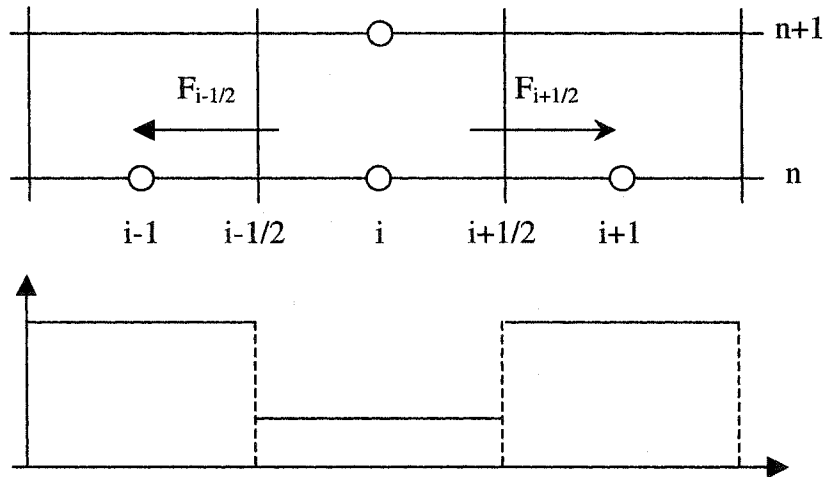


Figure 11 Structure de la solution du problème de Riemann aux frontières de l'élément.

Il existe plusieurs schémas pour évaluer le flux à l'interface. Ces schémas font partie de deux familles de méthodes : la famille des méthodes centrées, et la famille des méthodes décentrées. Dans la section qui suit, nous nous intéressons à décrire quelques unes de ces méthodes numériques qui représentent des solutions approximatives du problème de Riemann.

2.10.2 La méthode 'Lax-Friedrichs' :

La méthode 'Lax-Friedrichs' fait partie de la famille des méthodes centrées. C'est une méthode numérique qui peut être obtenue à partir d'une formule conservative, en donnant une définition approximative du flux à l'interface. Elle ne nécessite pas une solution exacte du problème de Riemann, et n'est pas basée sur la direction de propagation de l'onde. C'est une méthode de premier ordre, monotone et facile à implémenter.

L'expression du flux par la méthode 'Lax-Friedrichs' est la suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{LAX} = \frac{[F(U_i) - F(U_K)] \cdot n - \lambda (U_K - U_i)}{2}; \quad (2.41)$$

U et U_K représentent respectivement les vecteurs des variables conservatives des éléments i , et son voisin K .

$$\lambda = \max(u-a, u, u+a), \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

et ' a ' représente la célérité calculée comme suit :

$$a = \sqrt{g \cdot \left(\frac{h_i + h_K}{2} \right)}; \quad (2.42)$$

n est le vecteur unitaire normal à une frontière de l'élément, et son sens est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

La méthode 'Lax-Friedrichs', appelée parfois la méthode de 'Lax', ou le schéma de 'Lax Keller', reste une méthode très simple mais très diffusive.

2.10.3 La méthode 'HLL' :

Cherchant à calculer le flux de Godunov, « Harten », « Lax » et « Van Leer » [14] ont présenté une nouvelle approche à la solution du problème de Riemann. La résolution devient connue sous le nom de « HLL ». Dans cette approche, une approximation du flux numérique à l'interface est directement obtenue. L'idée principale a été de supposer une configuration de l'onde pour une solution qui consiste en deux ondes (l'onde de raréfaction, et l'onde de choc), séparant trois constantes d'état, (figure 12).

Supposant que la vitesse de l'onde soit donnée par un certain algorithme, l'application de la forme intégrale de la loi de conservation offre une approximation de l'expression

du flux. Cette approche produit des schémas pratiques grâce à la contribution de Davis [9] et Einfeldt [10], qui avaient proposé plusieurs façons de calculer les vitesses d'onde qui entrent en considération dans le développement de l'expression du flux. Cela a permis l'aboutissement à la méthode HLL dans sa forme actuelle, et dont la difficulté reste la supposition d'une configuration de deux ondes pour un système hyperbolique de deux équations.

L'approche « HLL » suppose une estimation des deux vitesses d'ondes S_L et S_R , pour des petits et grands signaux de vitesse dans la solution du problème de Riemann, avec les données $U_L = U_i^n$, $U_R = U_{i+1}^n$, et les flux correspondant $F_L = F(U_L)$, et $F_R = F(U_R)$. La figure suivante illustre la structure des deux ondes dans la solution du problème de Riemann par l'approche 'HLL'.

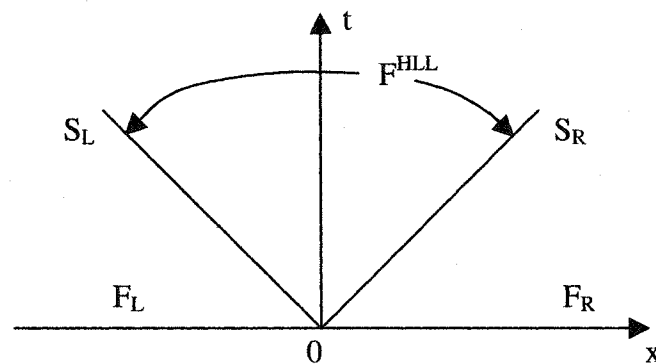


Figure 12 Structure des ondes intermédiaire

Les ondes intermédiaire comme les ondes de cisaillement, et les contacts de discontinuité, sont ignorés dans cette approche.

En appliquant la forme intégrale de la loi de conservation sur un volume de contrôle, le flux numérique dérivé, prend l'expression du flux 'HLL', qui est le suivant :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} F_L & ; \text{ si } S_L \geq 0, \\ F_{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & ; \text{ si } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ F_R & ; \text{ si } S_R \leq 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

Quant aux deux vitesses d'ondes S_L et S_R , il y a plusieurs choix possible pour leur évaluation. Les expressions que nous avons considérés dans nos calculs, ont été relevées de Toro [28].

$$S_L = u_L - a_L q_L ; a_L = \sqrt{gh_L} \quad (2.44)$$

$$S_R = u_R + a_R q_R ; a_R = \sqrt{gh_R}$$

$$q_K = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{(h^* + h_K) h^*}{h_K^2} \right]} & \text{ si } h^* > h_K; \\ 1 & \text{ si } h^* \leq h_K; \end{cases} \quad (2.45)$$

où $K = L, R$

h^* est une estimation de la solution exacte de la profondeur dans la région étoilée. Plusieurs expressions de h^* peuvent être obtenues selon l'approximation adoptée. Nous avons utilisé l'expression proposée par Toro [28], qui est la suivante :

$$h^* = \frac{1}{2} (h_L + h_R) - \frac{1}{4} (u_R - u_L) \frac{(h_L + h_R)}{(a_L + a_R)} \quad (2.46)$$

Pour un système d'ordre plus élevé, la méthode 'HLL' s'avère inadéquate. L'insatisfaction de la solution obtenue par cette méthode, a conduit au développement de la méthode 'HLLC' introduite par Toro et collaborateurs.

2.10.4 La méthode 'HLLC' :

Pour de grands systèmes d'équations, comme l'équation d'Euler ou l'équation d'eaux peu profondes en deux dimensions, l'hypothèse de l'approche 'HLL' fondée sur deux ondes n'est pas suffisante. Conséquence directe : la résolution des caractères physiques (surface de contact, matière d'interface et ondes de cisaillement), peut s'avérer inexacte. Lorsque ces caractères sont reliés à la forme du maillage, le calcul numérique est alors enduit en erreur.

Ainsi, une correction a été rapportée sous le nom de 'HLLC'. Instaurée par Toro, Spurce et Speares [29], la méthode HLLC offre une très bonne approximation dans l'application pratique. Cette même version, récemment modifiée par Batten, Goldberg et Leschziner [5], a été appliquée avec succès sur des écoulements turbulents. La figure 13 illustre la structure complète de l'approche, où une nouvelle vitesse S^* a été inclut, et qui représente la vitesse de l'onde intermédiaire.

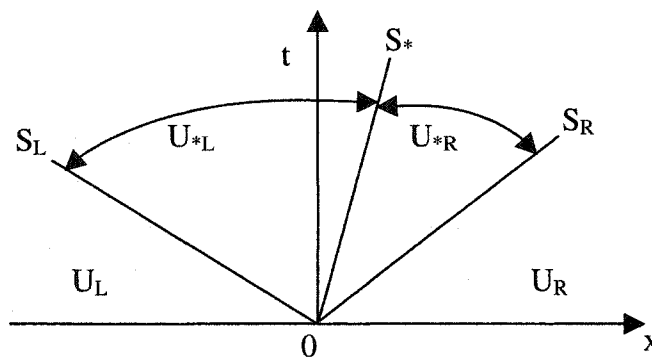


Figure 13 Structure de l'approche HLLC

Les expressions des vitesses ayant déjà été développées, l'expression du flux numérique qui dérive de l'approche 'HLLC' est la suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} FL & si & 0 \leq S_L; \\ F_{*L} & si & S_L \leq 0 \leq S^*; \\ F_{*R} & si & S^* \leq 0 \leq S_R; \\ F_R & si & 0 \geq S_R; \end{cases} \quad (2.47)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} F_{*L} &= F_L + S_L (U_{*L} - U_L); \\ F_{*R} &= F_R + S_R (U_{*R} - U_R); \end{aligned} \right\} \text{ flux calculés dans la région étoile ;} \quad (2.48)$$

Les états U_{*L} et U_{*R} sont donnés par l'équation suivante :

$$U_{*K} = h_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S^*} \right) \left[\frac{1}{\Psi_K} \right]; \quad (K = L, R) \quad (2.49)$$

Les expressions des deux vitesses d'ondes S_L et S_R sont les mêmes que dans la méthode 'HLL'. Après une manipulation de l'équation (2.48), l'expression de S^* est la suivante :

$$S^* = \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)} \quad (2.50)$$

La vitesse S^* possède la propriété d'être exacte pour des données d'état dans le cas du lit humide, où elle constitue la vitesse de front.

2.10.5 La méthode Weighted Average Flux, 'WAF' :

La méthode Weighted Average Flux a été proposée la première fois par Toro en 1992, pour la résolution des équations d'Euler. Elle a été appliquée aux équations « d'eaux peu profondes » en deux dimensions par Toro[26], Watson et al.[32] et Fraccarollo et Toro[11]. La méthode 'WAF' est une extension de la méthode Godunov Upwind du

second ordre. Elle s'est révélée oscillatoire, avant qu'une modification ne lui a été rapportée, celle de l'introduction de la contrainte TVD (total variation minishing).

Pour les équations D'eaux peu profondes, le problème de Riemann peut être décomposé en trois ondes. L'onde du milieu est une onde de cisaillement, et l'onde de gauche et de droite sont respectivement, une onde de raréfaction et une onde de choc. En conséquence, il y a quatre combinaisons d'ondes possibles, impliquant les trois ondes. La méthode de Godunov de premier ordre utilise, l'axe t représentant le temps à $x=0$ pour définir le flux à l'interface $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ dans la solution du problème de Riemann, avec les données U_i^n et U_{i+1}^{n+1} .

Toro a développé la méthode de Godunov du second ordre, en utilisant une solution moyenne dans l'espace et dans le temps. La moyenne prend la forme d'une intégrale de flux. Dans la formule conservative du schéma de Godunov, U_i^n est une intégrale moyenne de U de l'élément i au pas de temps n , et $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ est le flux numérique intégré. Le problème de Riemann local (équation (2.36)) consiste en trois vitesses $a_{i+\frac{1}{2}}^K$, séparant quatre constantes d'états, (figure 14).

Ceci est noté par :

$$U_{i+\frac{1}{2}}^{(K)}, \text{ où } 1 \leq K \leq 4, \text{ avec } U_{i+\frac{1}{2}}^{(1)} \equiv U_i^n, \text{ et } U_{i+\frac{1}{2}}^{(4)} \equiv U_{i+1}^n; \quad (2.51)$$

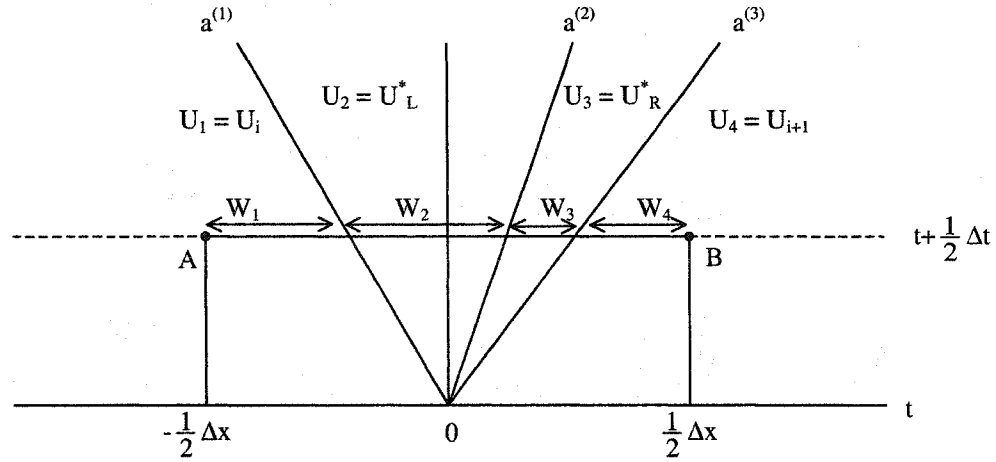


Figure 14 Les poids W_K du schéma WAF pour un système de trois équations.

où $U^* = U\left(\frac{2x}{\Delta t}, U_i^n, U_{i+1}^n\right)$ est la solution du problème de Riemann avec les données U_i^n et U_{i+1}^n évaluée au demi niveau de temps le long de dx . L'intégration est facile à performer, par contre son implémentation est très coûteuse. En pratique, il est suffisant de représenter toutes les ondes dans la solution comme étant un simple rayon droit. L'expression (2.43) devient une sommation de la forme :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \sum_{K=1}^4 W^{(K)} F_{i+\frac{1}{2}}^{(K)}; \quad (2.52)$$

où le poids $W^{(K)}$ est donné par :

$$W_K = \frac{1}{2}(C_K - C_{K-1}); C_0 = -1, C_{N+1} = 1 \quad (2.53)$$

et $C_K = \frac{\Delta t S_K}{\Delta x}$ le coefficient de courant de l'onde K .

S_K représente la vitesse de l'onde K , et N le nombre d'ondes dans la solution de Riemann.

F est la valeur du vecteur flux dans l'intervalle K de longueur W_K . Le flux numérique devient un poids moyen des flux dans cet intervalle K. En introduisant l'équation (2.53) dans l'équation (2.52), on obtient l'expression alternative suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{waf} = \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N C_K \Delta F_{i+\frac{1}{2}}^{(K)} ; \quad (2.54)$$

où :

$$\Delta F_{i+\frac{1}{2}}^{(K)} = F_{i+\frac{1}{2}}^{(K+1)} - F_{i+\frac{1}{2}}^{(K)} ; \quad (2.55)$$

Pour le modèle d'advection linéaire, le schéma est identique à la méthode de Lax-Wendroff de second ordre, précis dans le temps et dans l'espace. De fausses oscillations à proximité du gradient élevé sont prévues. C'est ainsi qu'une modification a été rapportée au schéma 'WAF' afin d'éviter ces oscillations, par l'introduction de la contrainte « TVD » (Totale Variation Minishing). L'expression du flux devient :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{waf} = \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \text{sign}(C_K) A_K \Delta F_{i+\frac{1}{2}}^{(K)} ; \quad (2.56)$$

A_K représente une fonction limiteur de flux, et 'Sign' une fonction qui a les propriétés suivantes :

$$\text{Sign}(a) = 1.0 \text{ si } a \geq 0 ; \quad (2.57)$$

$$\text{Sign}(a) = -1.0 \text{ si } a < 0 ; \quad (2.58)$$

Dans notre code, nous nous sommes servi de la routine développée en 1999 par Toro[28] pour évaluer le flux avec la méthode 'WAF'.

CHAPITRE 3

IMPLÉMENTATION ET RÉSULTATS

3.1 Introduction

Le problème de bris de barrage est traité en premier lieu en une dimension, ce qui a servi de base pour passer au cas bidimensionnel. Les résultats ont été relevés après des temps de simulation bien choisis pour faire l'objet de comparaison avec les résultats qui existent dans la littérature. Nous avons pris le soin de reproduire certaines expériences qui ont été présentées par Toro [27] et [28] pour valider notre code. Une étape que nous avons jugé nécessaire, pour pouvoir passer à l'étude d'un cas réel, que nous présenterons dans ce même rapport.

Plusieurs types de maillages ont été testés. Nous avons enchaîné avec un maillage rectangulaire uniforme, suivi d'un maillage triangulaire uniforme, pour ensuite adopter un type de maillage aléatoire, dans sa forme triangulaire.

3.2 Implémentation :

Le code a été développé sous un environnement Windows, en langage Fortran 90 en utilisant le Logiciel « Compaq Visual Fortran » version 6.5. Le studio de développement utilisé est de type « Fortran console application ». Ce logiciel a l'avantage de visualiser en temps réel le résultat de la simulation à chaque pas de temps, selon le choix de l'utilisateur, grâce à la bibliothèque « Compaq Array Visualizer », (figure 15). La lecture des données, comme le temps de simulation et certains autres paramètres fixes du problème, se fait à travers un fichier d'extension « .ini ».

La structure du code a été bâti de telle façon que la tâche soit répartie en trois grandes parties. La première partie consiste à former une catégorie de routines qui aura la tâche

d'effectuer la lecture des données, la recherche des voisins, définir les conditions initiales, et détecter les cellules de l'entrée, de sortie et de la frontière solide. Ensuite vient l'étape de calcul des paramètres du problème basé sur les équations Saint-venant, soient la profondeur et les deux composantes de vitesses. L'utilisateur peut alors faire un affichage en temps réel, du paramètre qu'il désire visualiser. La troisième catégorie de routines sert à l'affichage des résultats. Certain de ces résultats seront à visualiser par le logiciel de visualisation « Tecplot », dont la forme du fichier a été implantée dans le code. Les simulations sont effectuées en utilisant des pas de temps constants. En adoptant un pas de temps variable, tout en respectant la condition CFL, le temps de calcul s'est vu diminué, tout en gardant un bon visionnement de la propagation de l'onde.

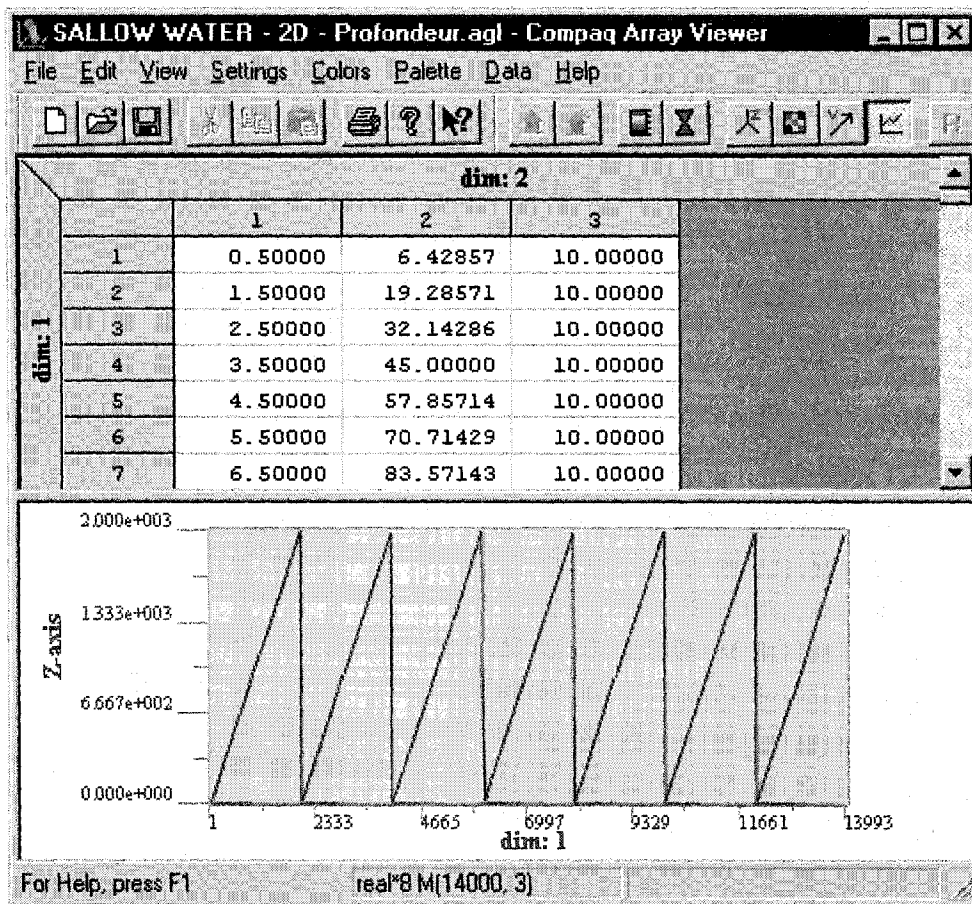


Figure 15 Fenêtre du visualisateur « Compaq Array Visualizer ».

3.3 Problème de barrage standard :

3.3.1 Le cas 1D :

Nous avons choisi comme référence dans nos test, les problèmes traités par Toro [28], et que nous avons reproduit exactement comme décrits afin d'être en mesure de discuter les résultats. Le premier problème est un problème de bris de barrage standard en une dimension. Le domaine d'étude est un canal à deux niveaux d'eau uniformes et au repos, séparés par un mur à la mi-distance formant un barrage. La figure suivante illustre les conditions initiale de ce problème :

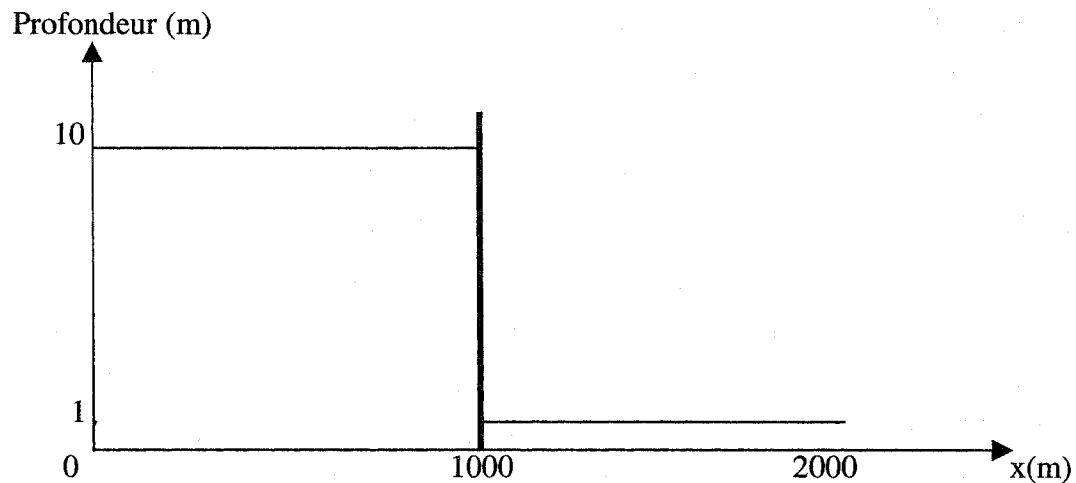


Figure 16 Conditions initiales d'un problème de bris de barrage standard

Pour ce cas, nous avons utilisé une rangée de 2000 cellules d'éléments, sorti d'un maillage rectangulaire uniforme. Le pas de temps est 0.02 sec, et le temps de la simulation 'ts' est fixé à 30 secondes. La hauteur est de 10 mètres à l'amont du barrage, et de 1 mètre en aval de celui-ci. Le temps de calcul vari selon la méthode utilisée pour le calcul du flux à l'interface. Les graphes suivantes illustrent la profondeur de l'eau ainsi que la vitesse de l'écoulement.

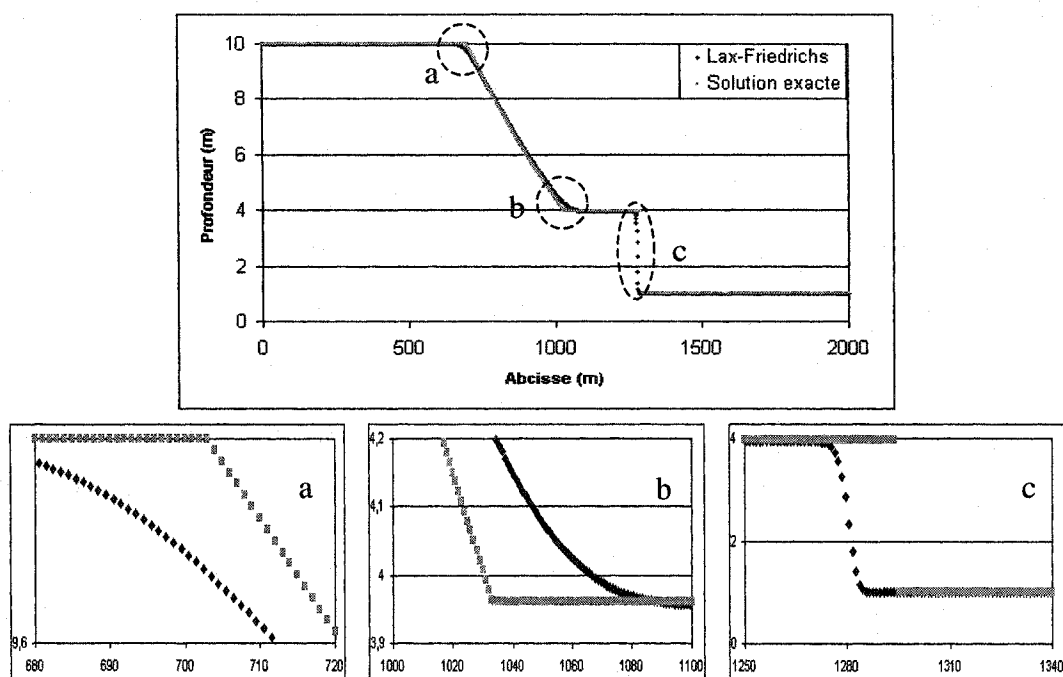


Figure 17 Barrage standard : Profondeur : La méthode Lax-Friedrichs

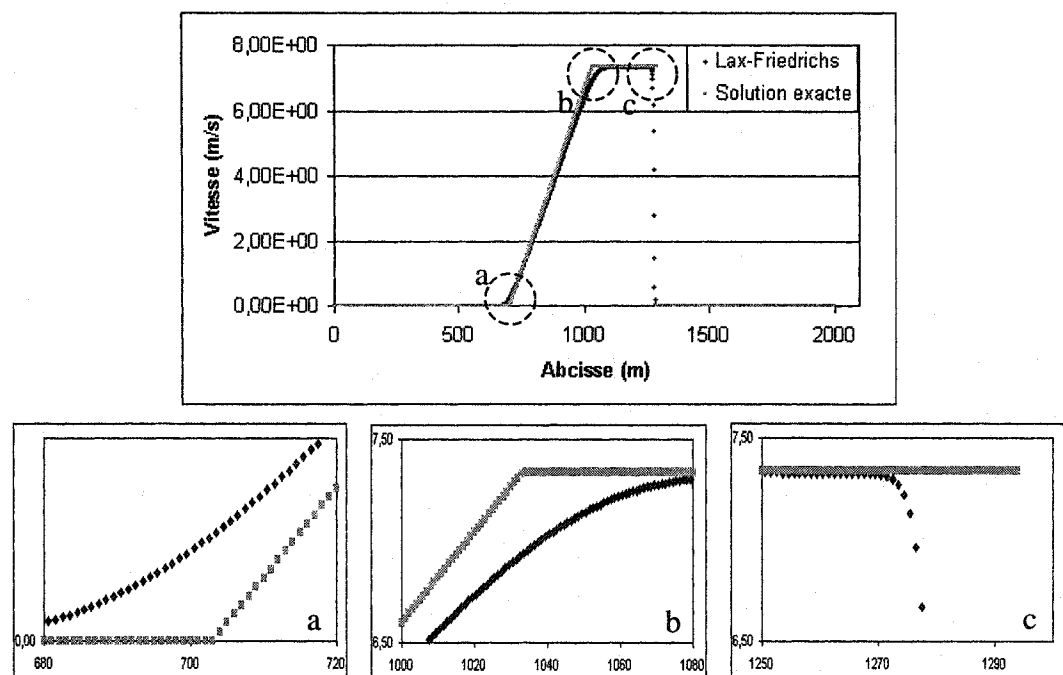


Figure 18 Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode Lax-Friedrichs

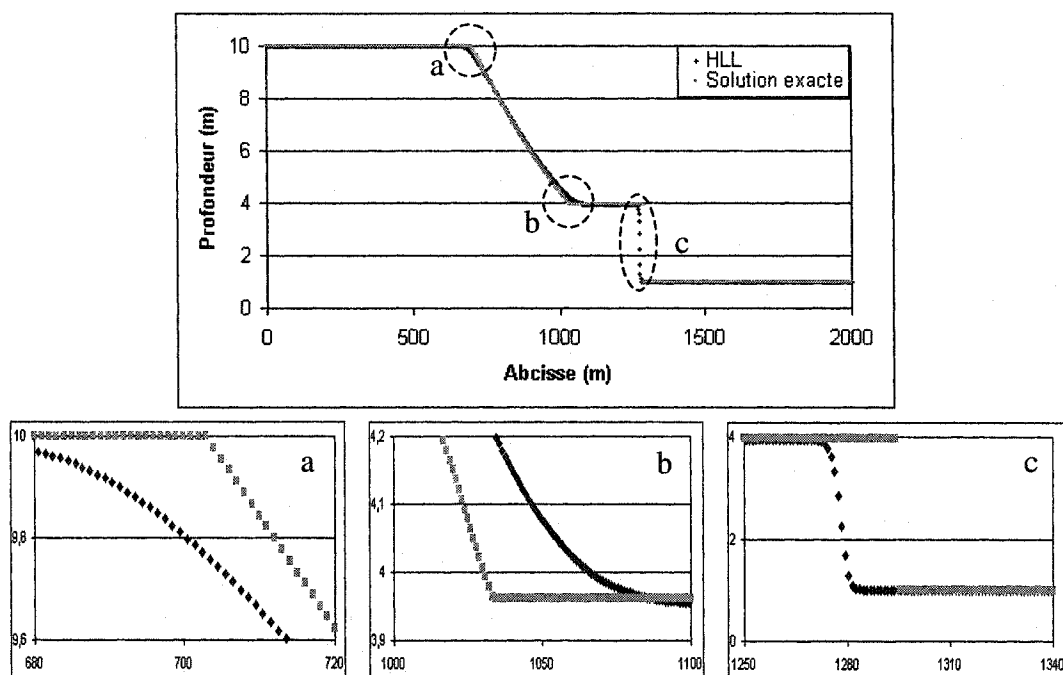


Figure 19 Barrage standard : Profondeur : La méthode HLL

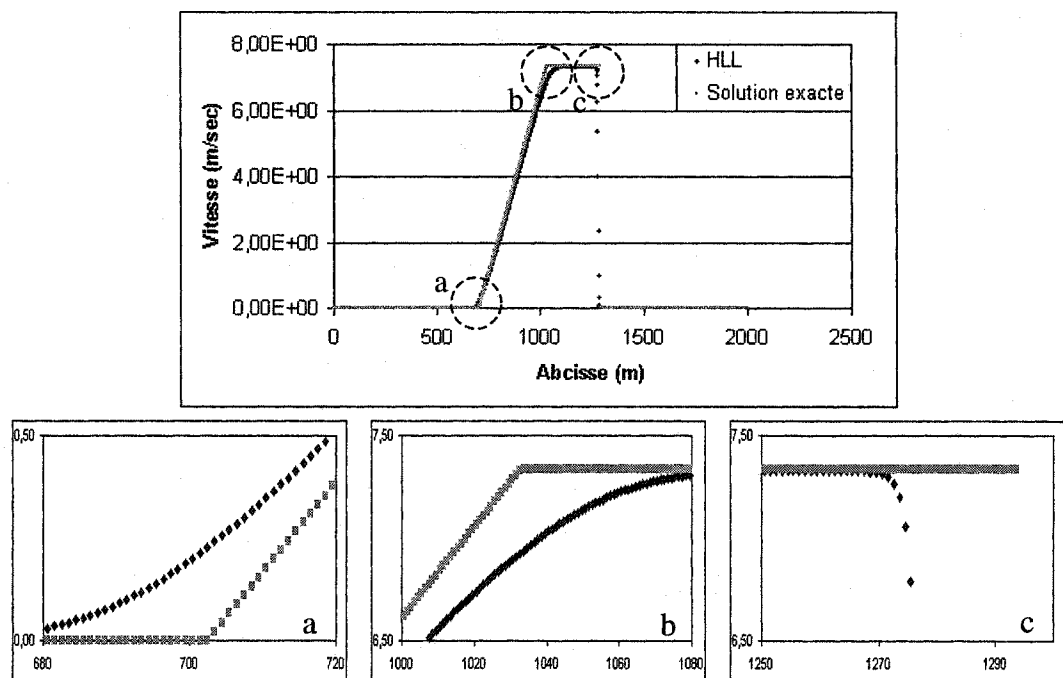


Figure 20 Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode HLL

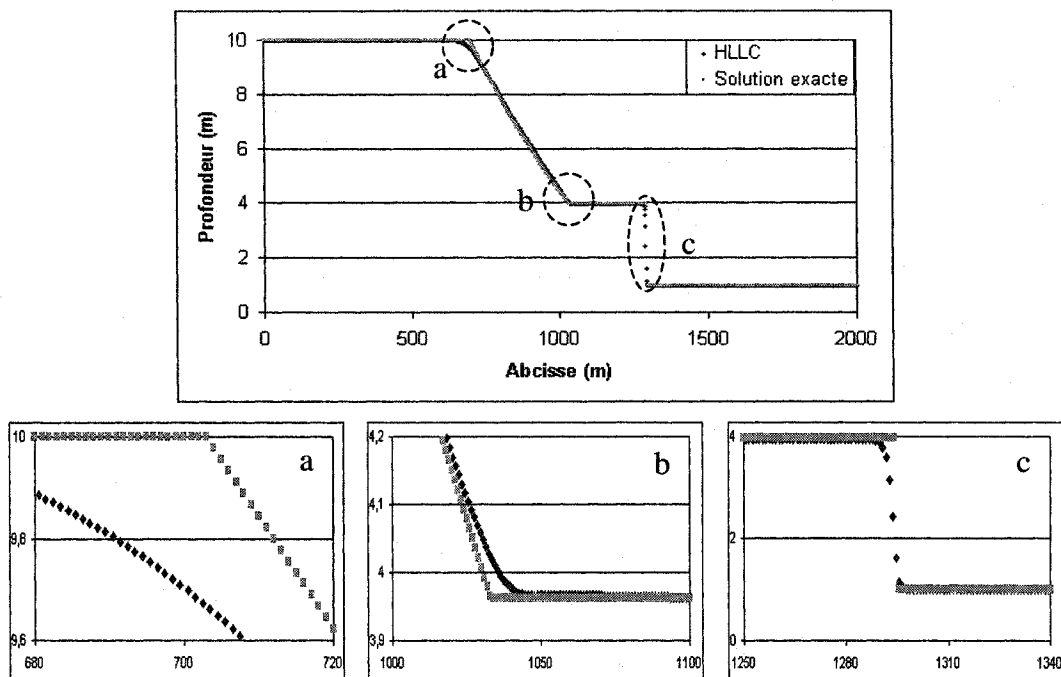


Figure 21 Barrage standard : Profondeur : La méthode HLLC

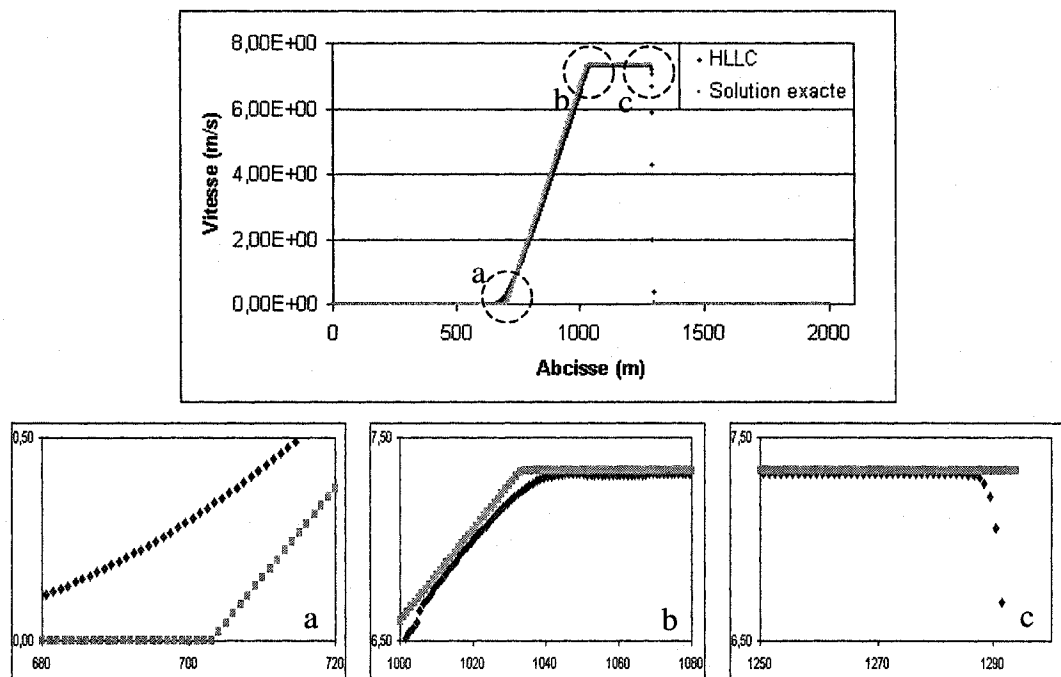


Figure 22 Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode HLLC

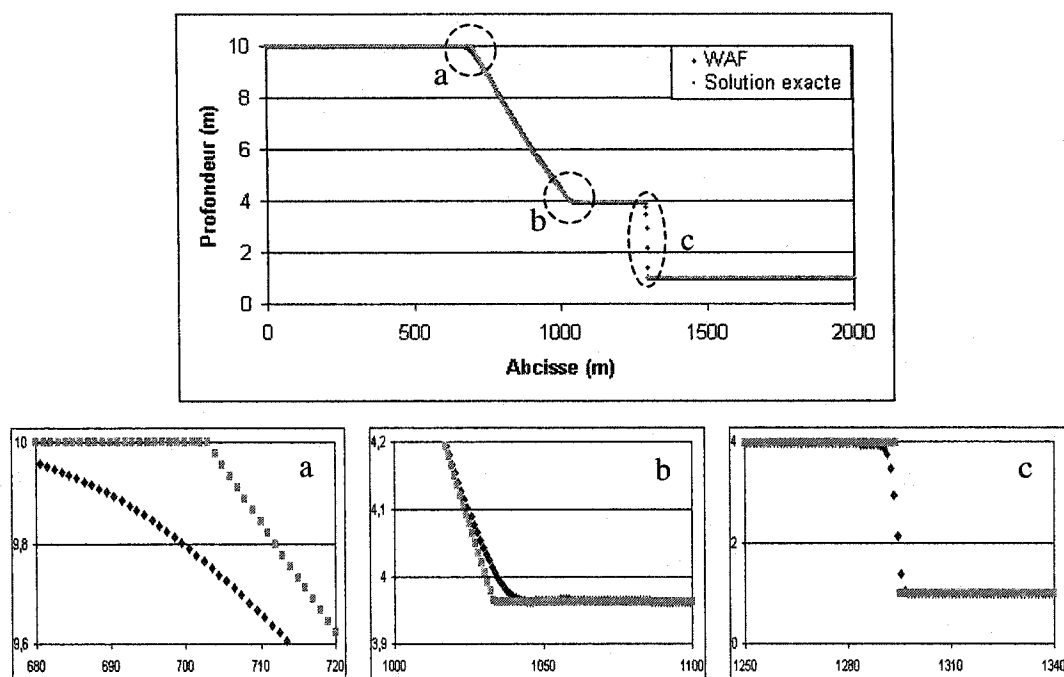


Figure 23 Barrage standard : Profondeur : La méthode WAF

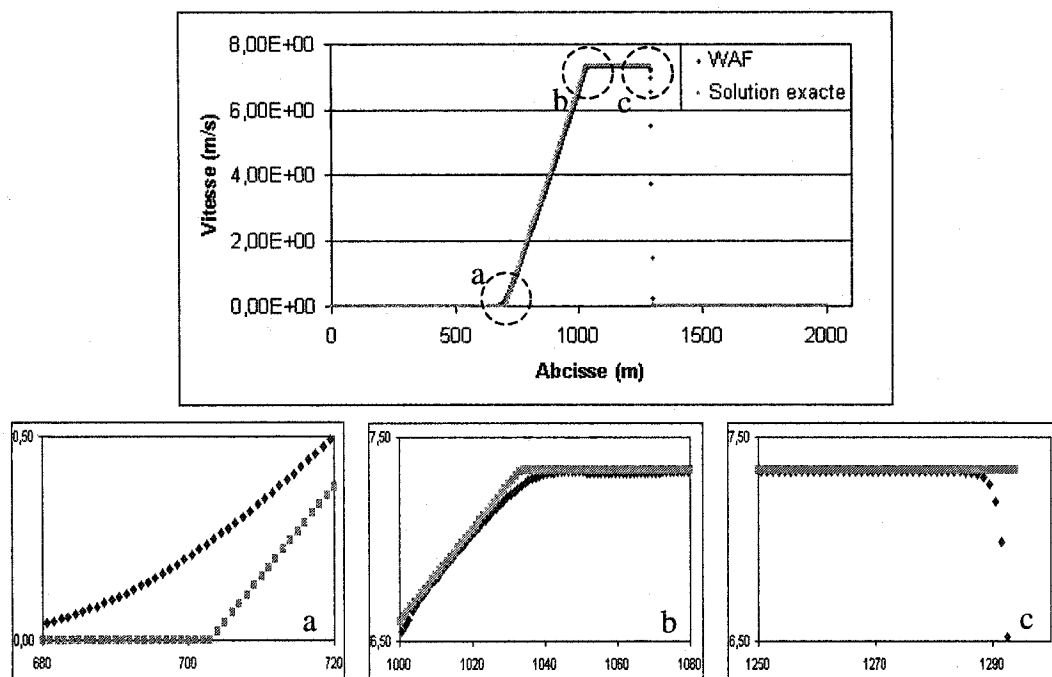


Figure 24 Barrage standard : Profil de vitesse : La méthode WAF

Les figures 17 à 24 illustrent l'allure de la profondeur ainsi que la vitesse en fonction de la longueur du canal après un temps de simulation de 30 secondes, utilisant les quatre méthodes de calcul de flux. La méthode 'Lax Friedrichs' donne un bon résultat, mais reste moins précise vue les zones lisses au début de l'onde de raréfaction et de l'onde de choc. L'allure de la solution par la méthode 'HLL' montre clairement que la supposition d'une zone étoile entre éléments, permet de mieux calculer le flux à l'interface de l'élément et de se rapprocher plus vers la solution exacte du problème. Un agrandissement au niveau de l'onde de choc nous permet de constater que cette dernière se voit amorcer plus rapidement, et ce pour les méthodes de calcul de flux : 'Lax-Friedrichs' et 'HLL'.

La méthode 'HLLC' offre plus de précision dans le calcul du flux. Ce qui se reflète clairement sur l'allure des deux courbes des figures 21 et 22. Le zoom des zones lisses permettent une meilleure comparaison entre la solution de notre code et la solution exacte. Dans la méthode 'HLLC', la région étoile a été divisée en deux, ce qui a permis d'aller chercher une expression plus précise du flux. L'influence des ondes intermédiaires est manifestement bien illustrée sur les deux graphiques de la profondeur et de la vitesse. Cependant, nous remarquons une légère forme de lissage au début de l'onde de raréfaction, et qui se reflète plus clairement sur le graphique de la vitesse.

La méthode 'WAF' donne un résultat meilleur, tant au niveau de la profondeur qu'au niveau de la vitesse (figures 23 et 24). Ceci est dû à la structure du schéma où trois flux ont été évalués pour une même interface entre deux éléments. Le résultat de la méthode est très satisfaisant, et est le plus proche de la solution exacte.

Tableau I

Barrage ordinaire en 1D, temps de calcul pour une simulation de 30 sec.

Méthode de calcul de flux	Lax-Friedrichs	HLL	HLLC	WAF
Temps de calcul (min)	1.8236	1.75318	2.42598	3.32294

Les figures présentant la profondeur en fonction de l'abscisse démontrent une bonne détection de choc, de part toutes les méthodes de calcul de flux. L'onde de raréfaction est bien détectée, ainsi que l'onde de choc. Le résultats de la simulation obtenu par la méthode WAF illustre une meilleure concordance au niveau de l'onde de choc par rapport à la solution exacte, mais est légèrement lisse au début de l'onde de raréfaction. Comparativement aux méthodes 'Lax-Friedrichs', 'HLL' et 'HLLC', la méthode 'WAF' reste la plus proche de la solution exacte dans le cas 1D.

Le temps de calcul dépend de la méthode adoptée pour l'estimation du flux. Celui de la méthode 'Lax-Friedrichs' est le plus court. Nous remarquons aussi que, plus la zone étoile est décortiquée, plus le temps de calcul est long. La méthode 'Waf' présente le temps de calcul le plus grand, mais son résultat justifie son utilisation.

3.3.2 Problème de bris de barrage en deux dimensions :

Le traitement du problème de bris de barrage en 1D nous a facilité la tâche pour passer au cas bidimensionnel. La structure des équations ne subit aucun changement relié au passage en deux dimensions. Par contre, le nombre d'élément se voit augmenter, ce qui va impliquer un temps de calcul plus grand.

Le domaine d'étude est un rectangle de 2000 mètres de long, et 90 mètres de large, et le nombre d'élément est de 20000 éléments. La profondeur en amont du barrage est de 10m, et de 1m en aval de celui-ci.

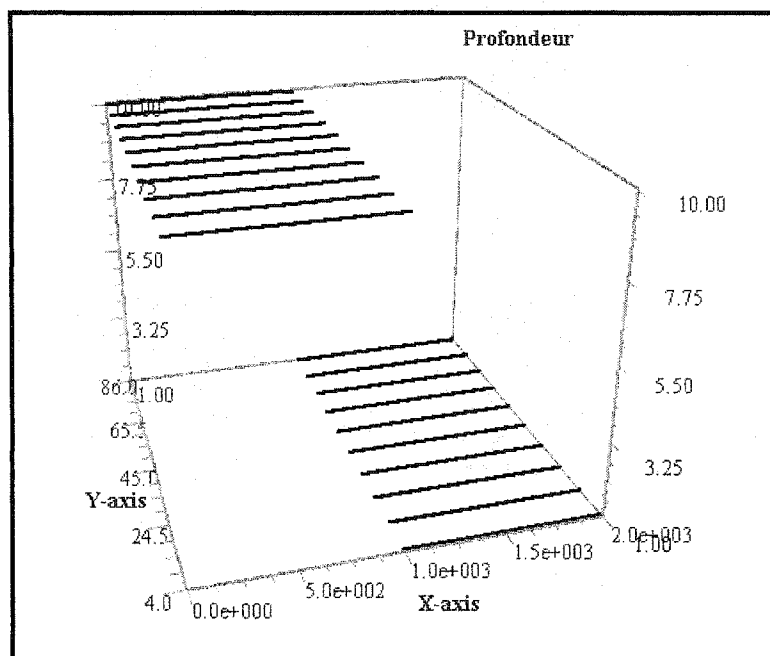


Figure 25 Barrage standard – 2D – Conditions initiales.

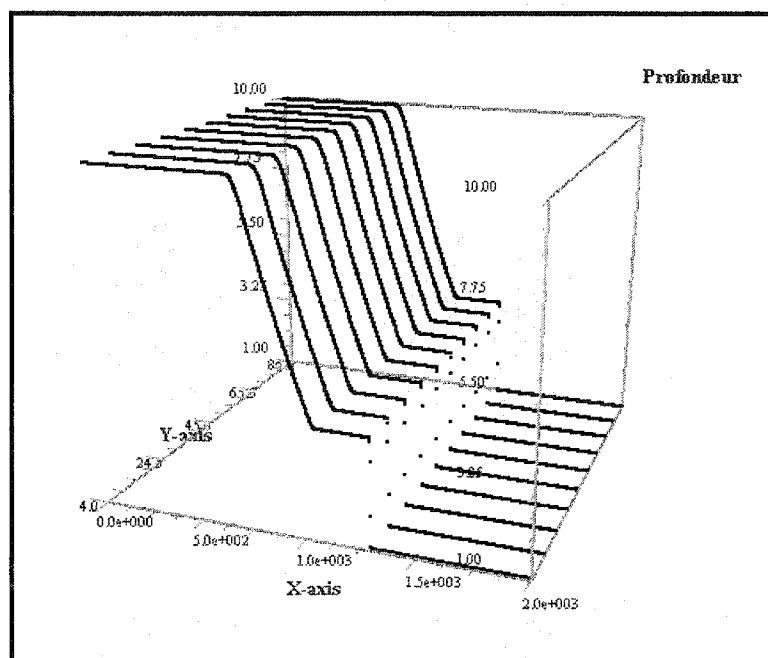


Figure 26 Barrage standard – 2D, profondeur, $t_s = 30.0$ sec

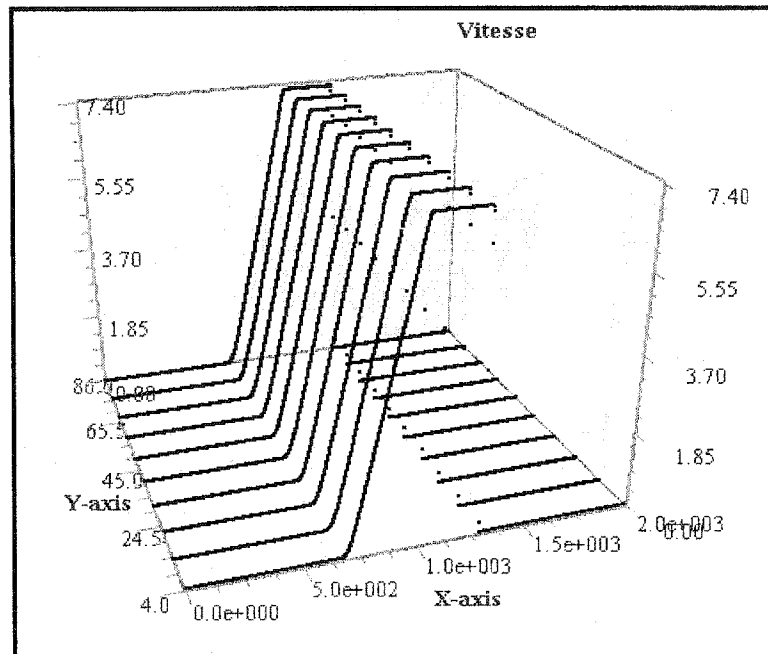


Figure 27 Barrage standard – 2D – profil de vitesse, $t_s = 30.0$ sec

La condition aux limites imposée est une cellule d'éléments miroirs aux éléments sur le bord du domaine.

Les figures 26 et 27, illustrent l'allure de la profondeur, ainsi que la vitesse, en fonction de la longueur du domaine. Le temps de simulation est fixé à 30 secondes, et la méthode utilisé pour calculer le flux à l'interface de l'élément est la méthode 'WAF'.

Dans le but de discuter les résultats de la simulation lancée en utilisant la méthode 'Lax-Friedrichs', 'HLL' et 'HLLC', nous présentons ici différents graphiques sur lesquels figurent l'allure de la profondeur le long d'une cellule d'éléments, où l'influence du type et de la forme du maillage sur le résultat se fait distinguer. La discussion de ces résultats se fera à la base du résultat numérique obtenu par Toro [28]. Le type du maillage employé est un maillage quadratique, structuré et uniforme

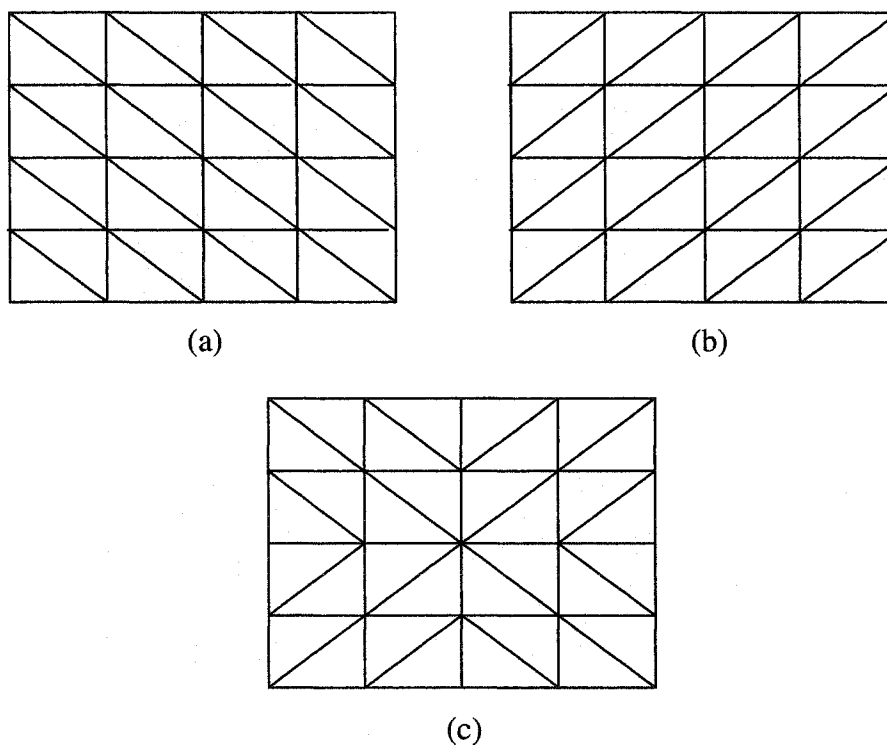


Figure 28 Les formes de maillage triangulaire adoptés au cours de la simulation.

Une forme aléatoire du maillage triangulaire notée (d) a été aussi utilisée.

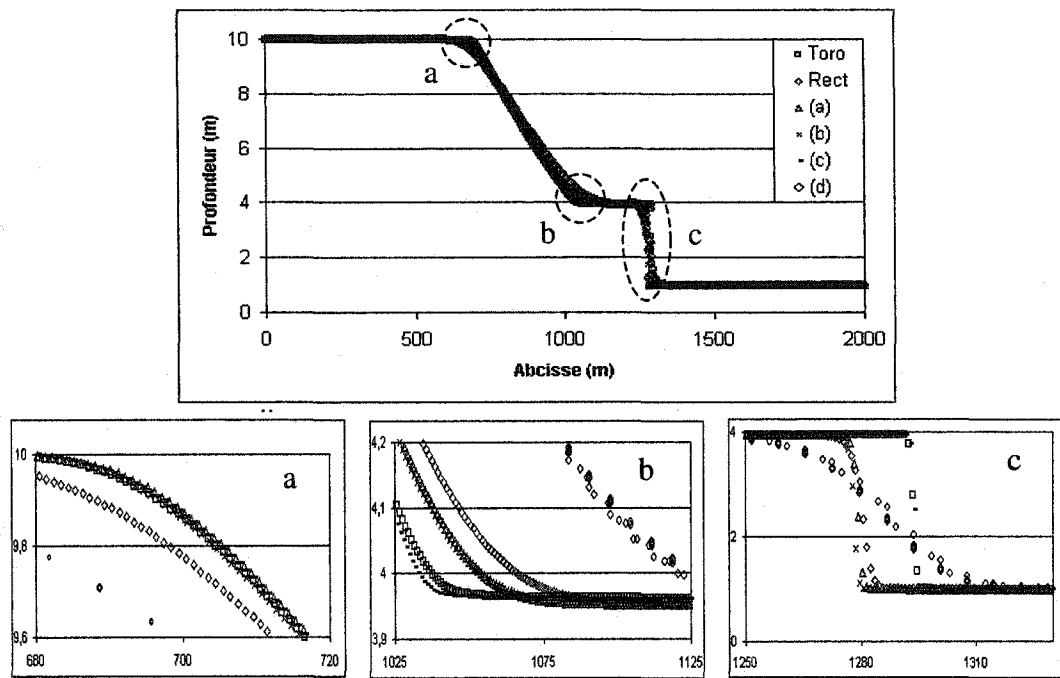


Figure 29 Barrage standard 2D, méthode Lax-Friedrichs - Effet du maillage, $t_s=30\text{sec}$

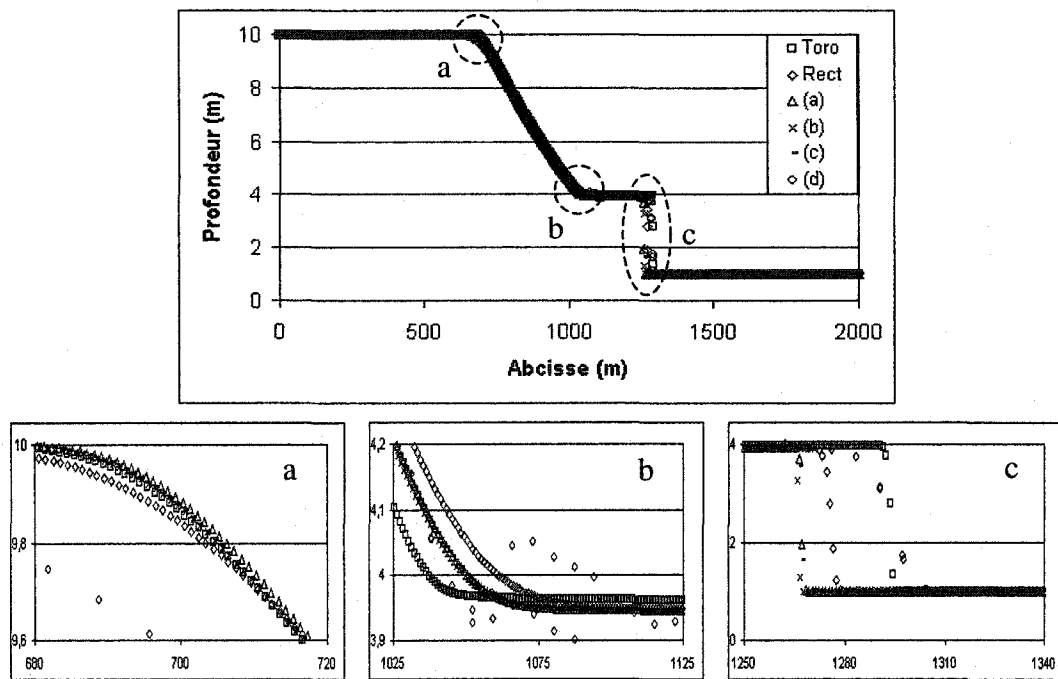


Figure 30 Barrage standard 2D, méthode HLL - Effet du maillage, $t_s=30\text{sec}$

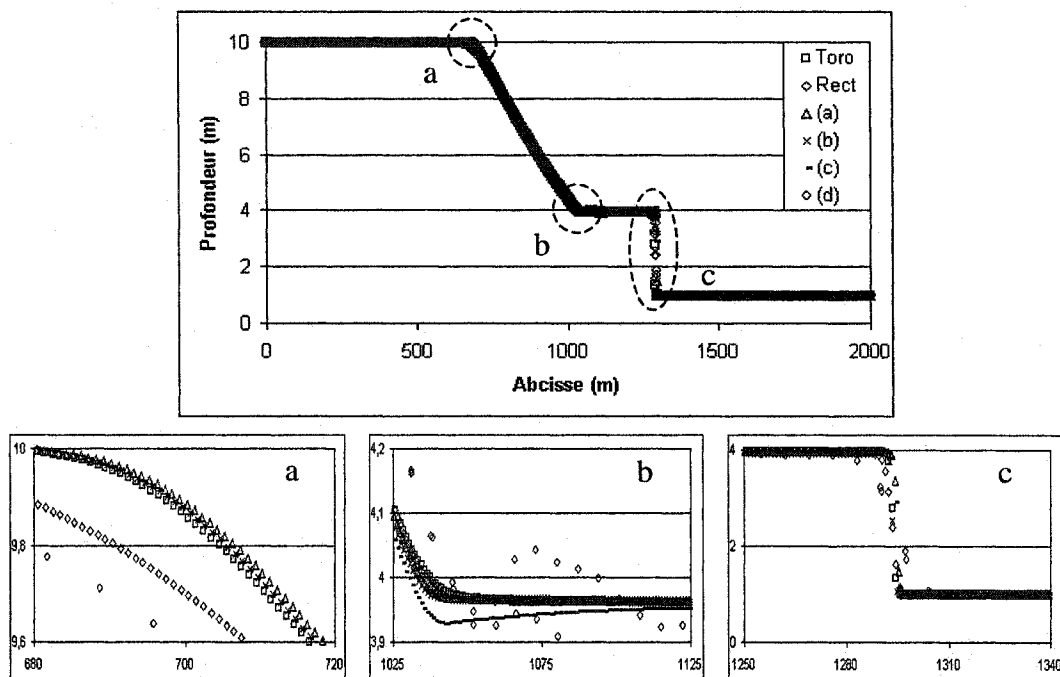


Figure 31 Barrage standard 2D, méthode HLLC - Effet du maillage, $t_s=30\text{sec}$

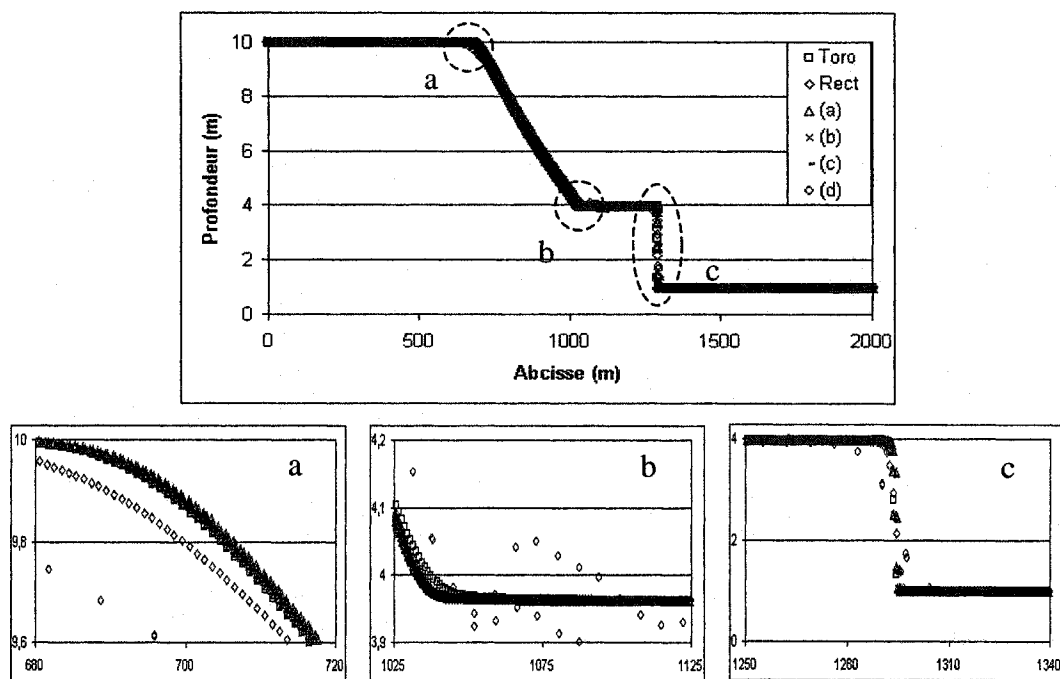


Figure 32 Barrage standard 2D, méthode WAF - Effet du maillage, $t_s=30\text{sec}$.

Les figures numérotées de 29 à 32 illustrent l'influence du maillage sur le résultat en utilisant les quatre méthodes de calcul de flux. L'allure des courbes pour chaque méthode et chaque forme de maillage est bien dessinée, et illustre clairement la naissance des deux ondes de directions opposées. Le bon développement de l'onde de choc dans les méthodes 'WAF' et 'HLLC' laisse le visionnement des courbes dans cette partie du domaine moins claire. Pour les méthodes 'Lax-Friedrichs' et 'HLL', l'onde de choc ne semble pas se propager jusqu'au bout vue qu'elle s'amorce plus rapidement. La concordance est par contre moins bonne si nous nous intéressons au développement de l'onde de raréfaction, qui s'affecte de la forme du maillage, et ce, pour les différentes méthodes. Un maillage triangulaire structuré offre une meilleur propagation de l'onde de raréfaction. Le maillage rectangulaire et le maillage triangulaire aléatoire sont relativement, moins précis.

L'utilisation d'un pas de temps variable offre une économie importante du temps de calcul. À titre d'exemple, en utilisant l'approche 'HLLC', le temps de calcul passe de 37.321min à 11.009min, (tableau II).

Tableau II

Comparaison de la durée de la simulation entre un pas de temps constant et variable.

Méthode de calcul de flux	Lax-Friedrichs	HLL	HLLC	WAF
Temps (min), $dt = 0.02$	20.056	23.1536	37.321	47.74215
Temps (min), dt variable (CFL = 0.8)	5.824	6.995	11.00914	14.08575

3.4 Problème de bris de barrage circulaire :

Dans cette section, nous procédons au traitement d'un problème de bris de barrage dont la forme et la géométrie sont configurées différemment. Le problème est le cas d'un bris de barrage circulaire, traité dans le but d'étudier le phénomène de la propagation d'onde. Le problème consiste à suivre l'effondrement soudain du barrage et voir son comportement dans le temps.

Le domaine d'étude est un carré de 40 mètres de côté, et d'une hauteur de 0.5m. Le barrage est situé au milieu du domaine avec un rayon de 2.5 mètres égale à son hauteur, (figure 33). Nous avons enchaîné l'étude de ce problème par l'adoption d'un maillage rectangulaire uniforme. Nous avons cherché par la suite à adopter d'autres types de maillages de forme triangulaire, en premier lieu uniforme, et ensuite aléatoire.

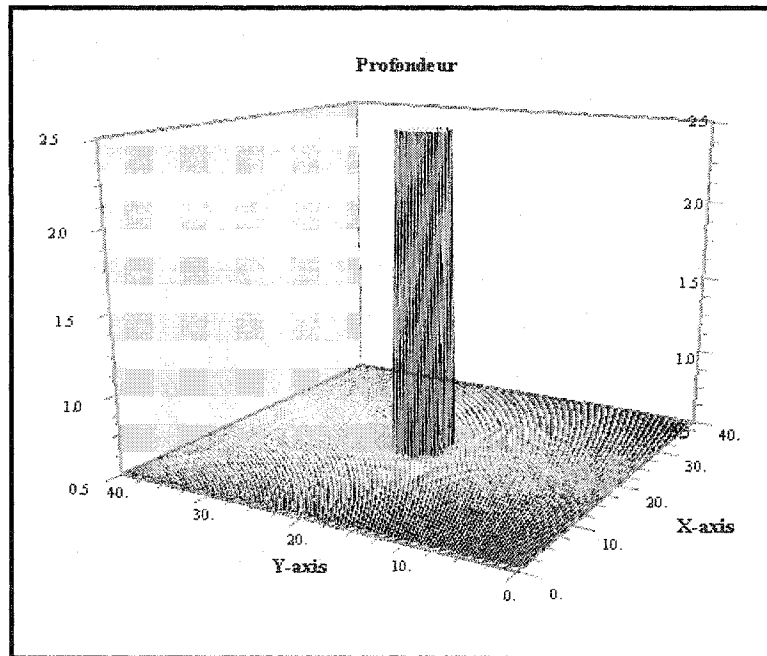


Figure 33 Conditions initiales du problème de bris de barrage circulaire.

La condition aux limites imposée est une cellules d'éléments miroirs pour les éléments situés sur la frontière du domaine.

Les résultats de la simulation dépendent en partie de la méthode choisie pour le calcul du flux à l'interface de l'élément, et aussi de la forme du maillage. Le nombre d'éléments pour le cas d'un maillage rectangulaire est de 40000 éléments, et le pas de temps utilisé est de 0.02 sec. La discussion de ces résultat se fera à la base du résultat numérique obtenu par Toro [28], dont le type du maillage employé est toujours un maillage quadratique, structuré et uniforme.

Nous présentons ici, les graphiques issues de la simulation à l'aide d'un maillage rectangulaire uniforme, suivi des graphiques obtenus par différents types de maillage triangulaires, avec comme méthode de calcul de flux, la méthode 'WAF'. Les résultats de la même simulation, utilisant les méthodes 'Lax-Friedrichs', 'HLL' et 'HLLC', seront ensuite présentés sur un même graphique pour fin de comparaison.

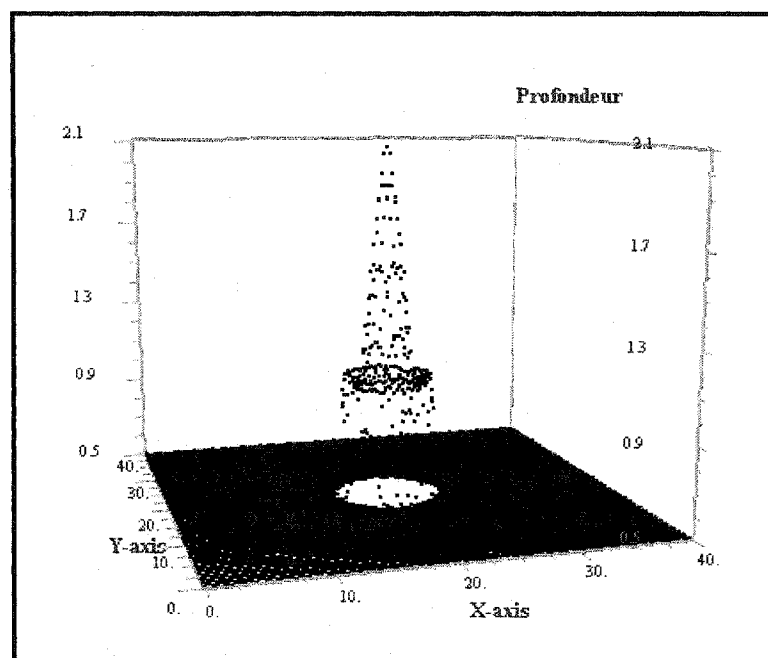


Figure 34 Barrage circulaire, $t_s = 0.4\text{sec}$

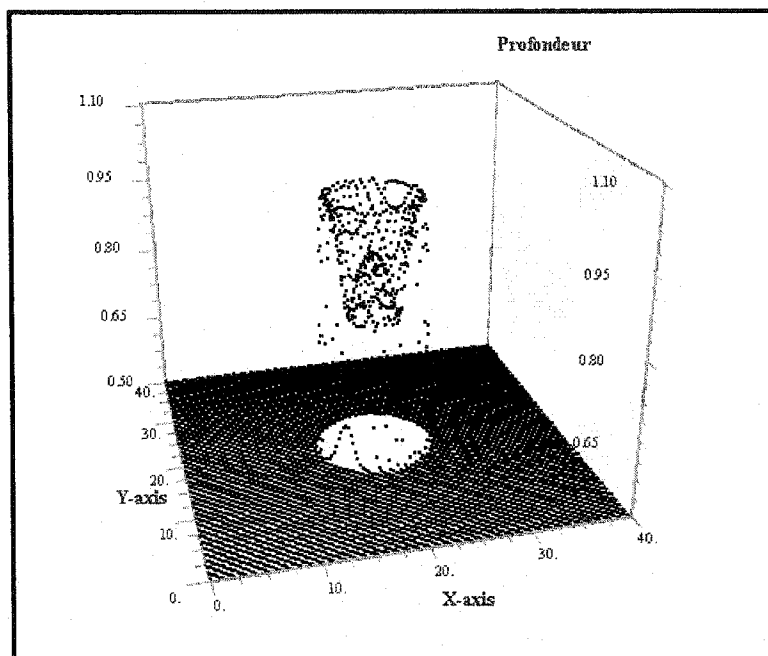


Figure 35 Barrage circulaire, $t_s = 0.7$ sec

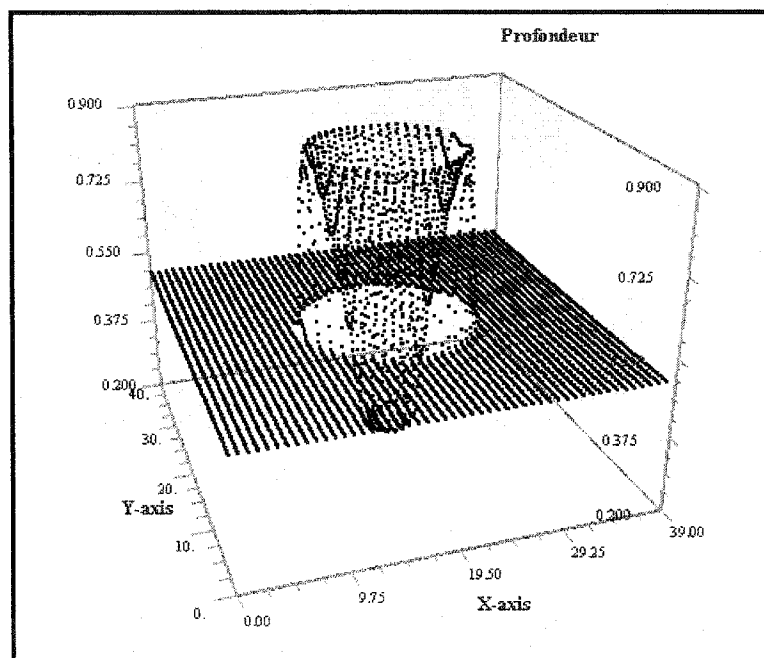


Figure 36 Barrage circulaire, $t_s = 1.4$ sec

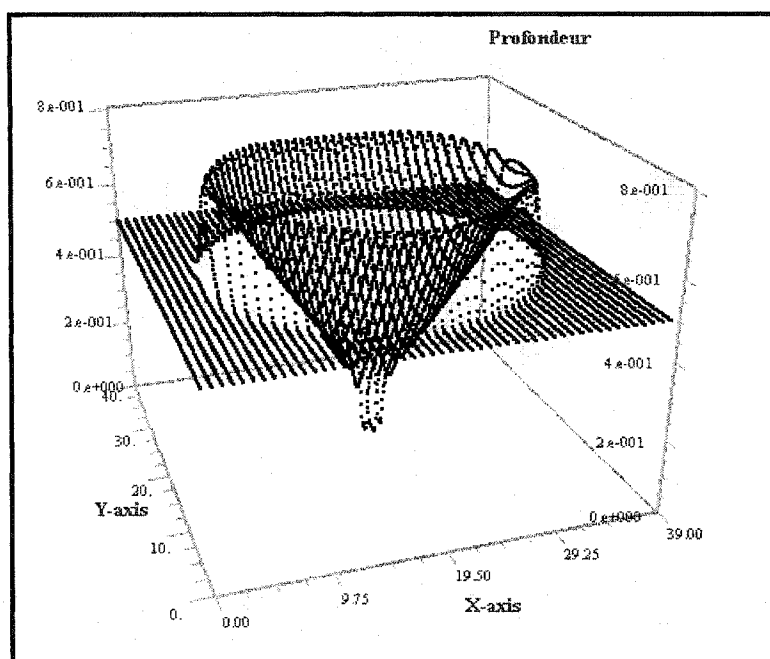


Figure 37 Barrage circulaire, $t_s = 3.5$ sec

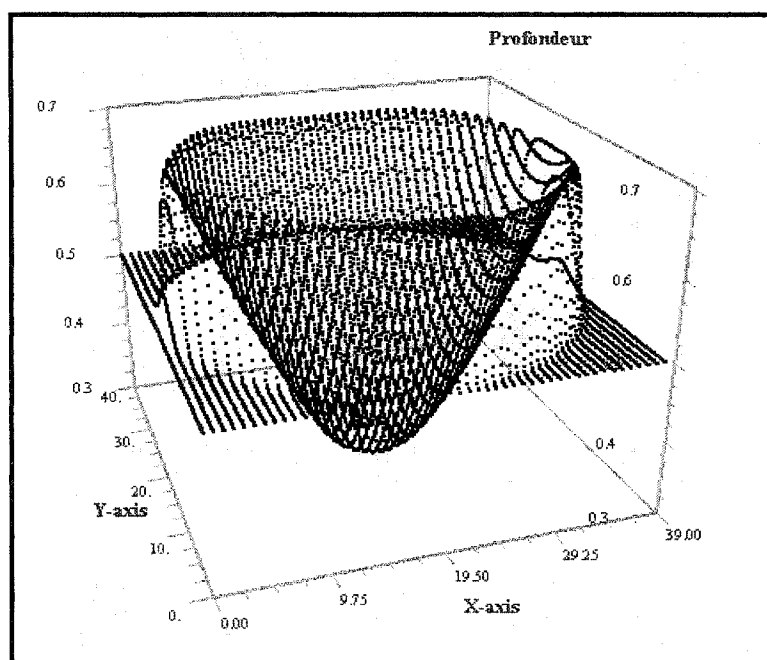


Figure 38 Barrage circulaire, $t_s = 4.7$ sec

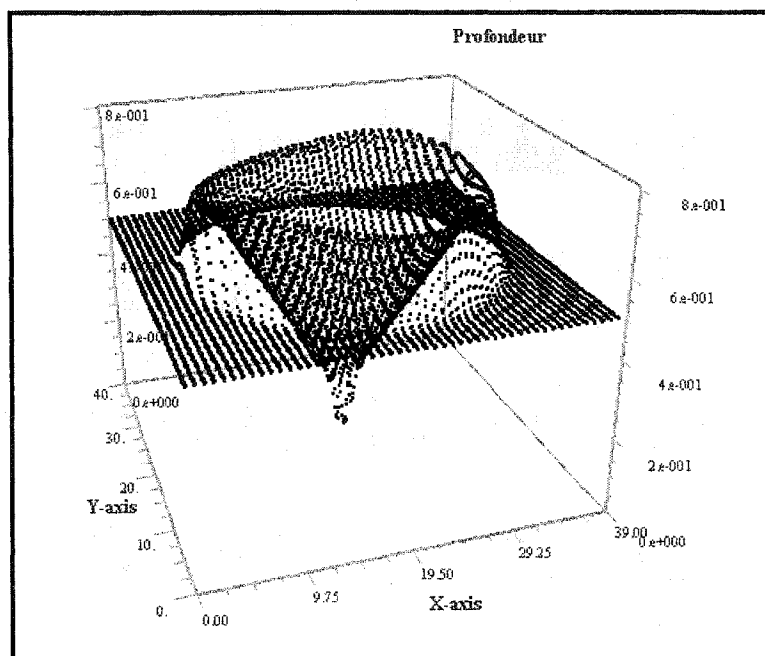


Figure 39 Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (a), $t_s = 3.5\text{sec}$

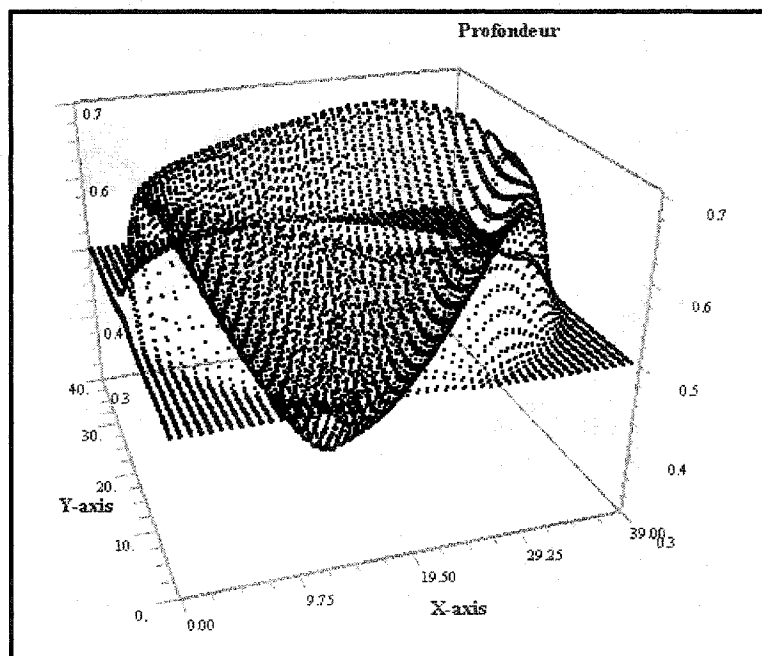


Figure 40 Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (a), $t_s = 4.7\text{sec}$

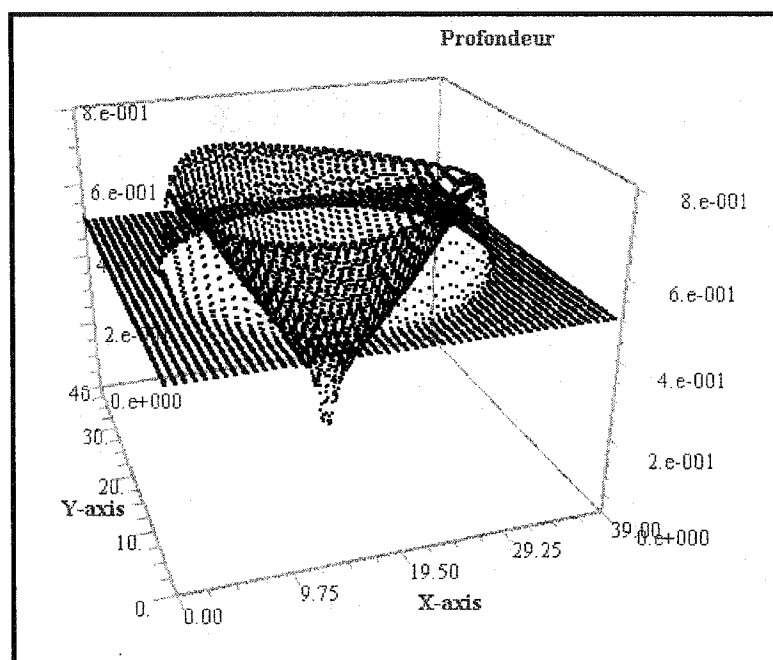


Figure 41 Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (b), $t_s = 3.5$ sec

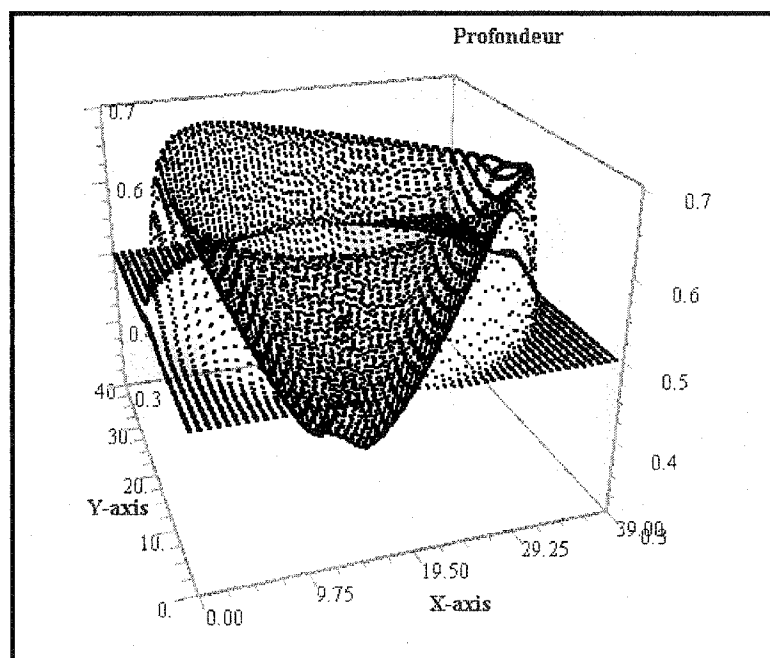


Figure 42 Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme(b), $t_s = 4.7$ sec

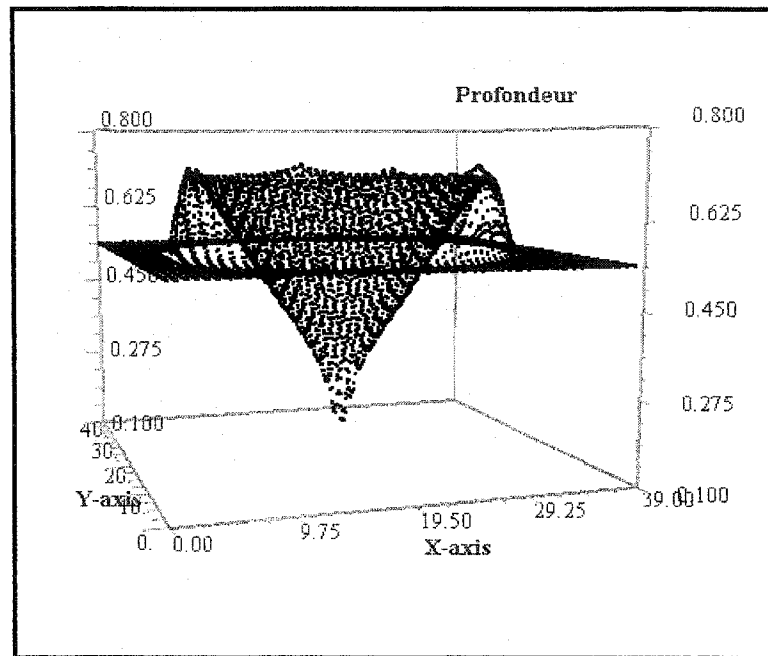


Figure 43 Barrage circulaire - maillage triangulaire - forme (c), $t_s = 3.5$ sec

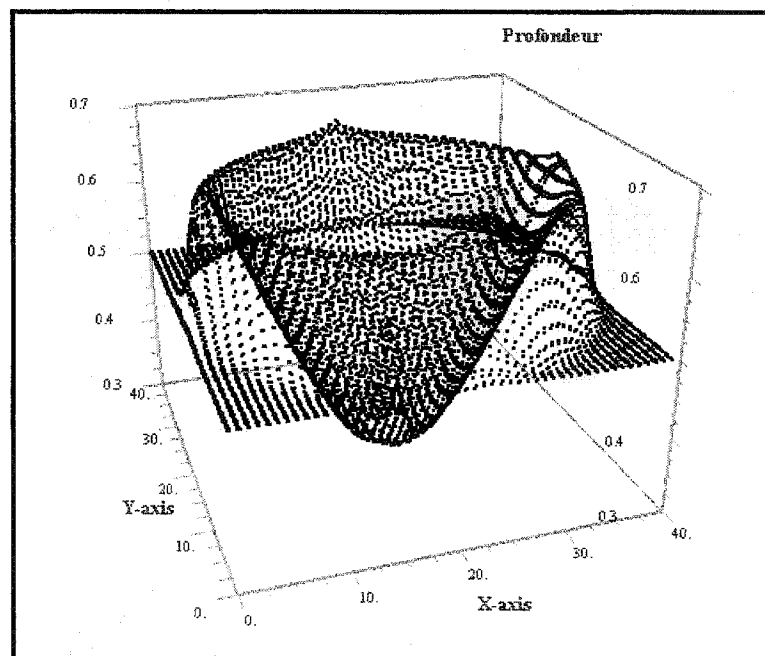


Figure 44 Barrage circulaire – maillage triangulaire - forme (c), $t_s = 4.7$ sec

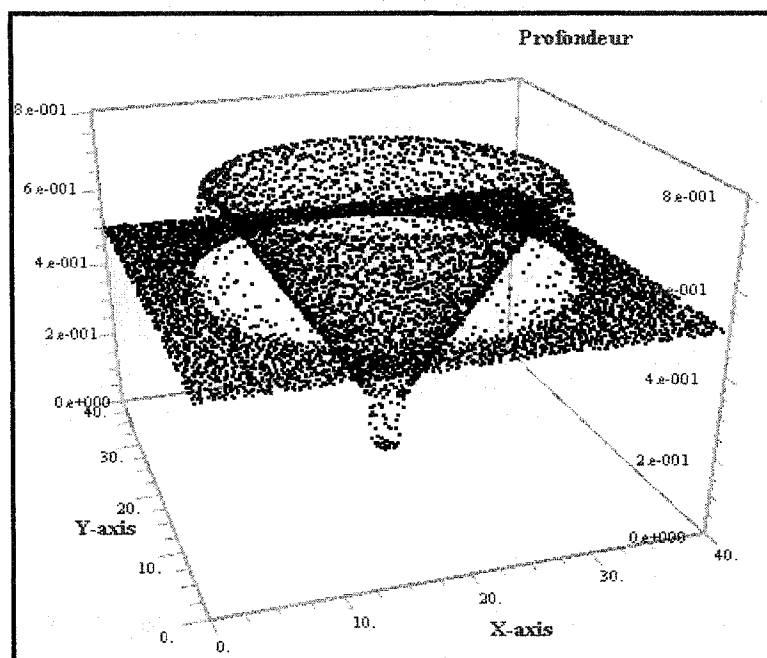


Figure 45 Barrage circulaire - maillage triangulaire forme (d), $t_s = 3.5$ sec

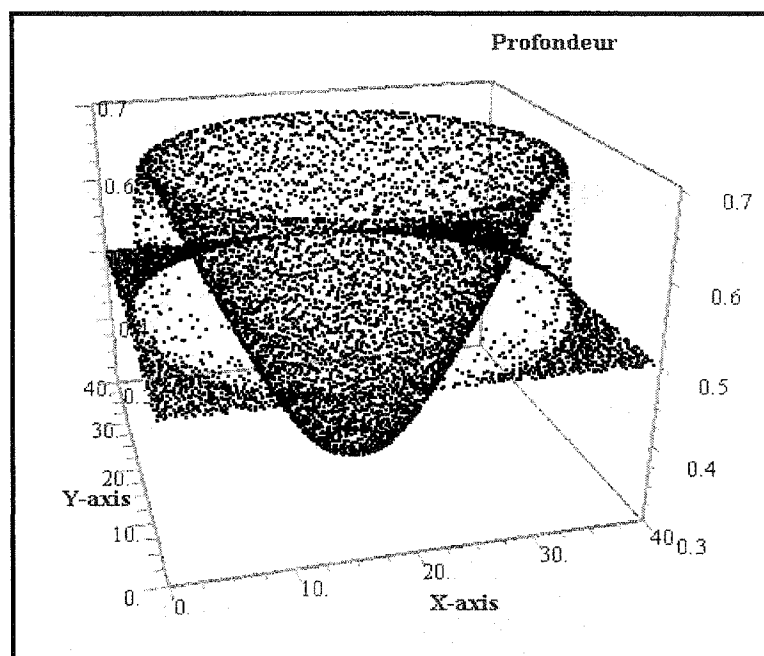


Figure 46 Barrage circulaire - maillage triangulaire forme (d), $t_s = 4.7$ sec

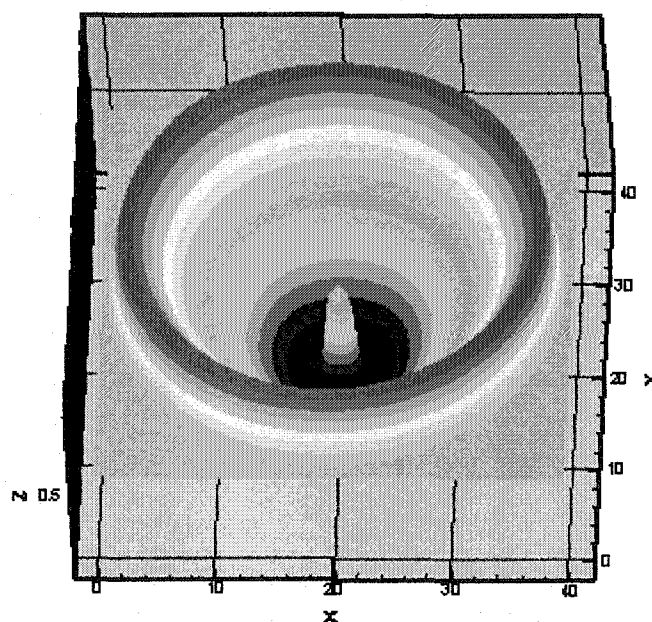
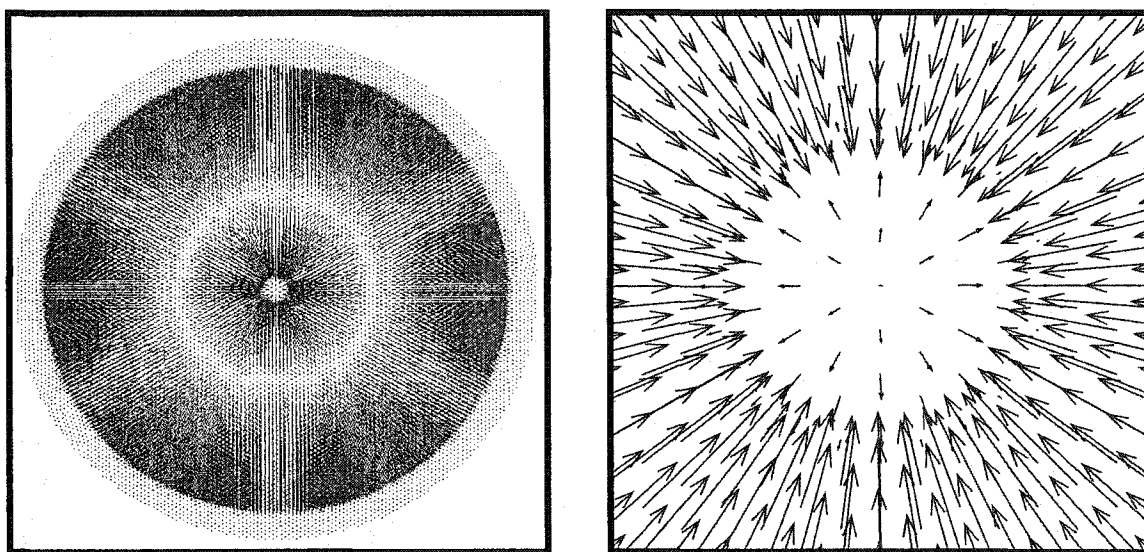


Figure 47 Barrage circulaire, vue de dessus, réalisée par « Tecplot » - $t_s = 4.7$ sec.



(a)

(b)

Figure 48 Barrage circulaire – maillage aléatoire – Visualisation des vecteurs vitesse, $t_s = 3.5$ sec

La figure 34 montre la position de la surface libre à l'instant $t = 0.4$ sec. La propagation de l'onde de choc circulaire vers l'extérieur ainsi qu'une onde de raréfaction vers

l'intérieur sont bien visibles. Cette dernière semble sur le point d'atteindre le centre du barrage. A l'instant $t = 0.7$ sec, l'onde de raréfaction circulaire subit une réflexion, produisant ainsi une chute de l'altitude de la surface libre à proximité du centre. L'onde de raréfaction circulaire continue à se propager du centre vers l'extérieur du barrage. Le niveau de la surface libre baisse au point de se retrouver au dessous de la valeur initial de 0.5m à l'extérieur du barrage, formant ainsi une seconde onde de choc, (figure 36). L'instant $t = 3.5$ sec nous permet de constater la propagation primaire de l'onde de choc circulaire plus loin du centre, et une autre secondaire, moins forte vers le centre. Cette dernière, se reflète, et se propage dans la direction verticale, (figure 37).

Les figures de 37 à 46 montrent l'allure de la surface libre aux instants $t=3.5$ sec, et $t=4.7$ sec. Ces figures ont été récoltées en adoptant différents types de maillage, dont la forme, semble avoir un impact sur l'allure de la profondeur. L'onde de choc secondaire formée à l'instant $t=4.7$ sec est aussi affectée, mais la forme des ondes développées au cours de la simulation reste toujours circulaire. La symétrie n'est pas respectée, un principe pourtant fondamentale dans ce type de problème. Par contre, le résultat de la forme (d), celui d'un maillage aléatoire présenté dans les figures 45 et 46, donne une symétrie parfaite, tout en gardant une bonne allure de la profondeur.

La figure 48 nous permet de constater le sens de la vitesse à l'instant $t=3.5$ sec. La naissance de la deuxième onde de choc apparaît au centre de la figure 48 (b), qui est un zoom de la zone du centre de la figure 48 (a), où le sens de la vitesse prend la direction du centre vers l'extérieur.

Dans ce qui suit, nous présentons une vue de la profondeur le long de l'abscisse x , extraite d'une coupe à une position y donnée.

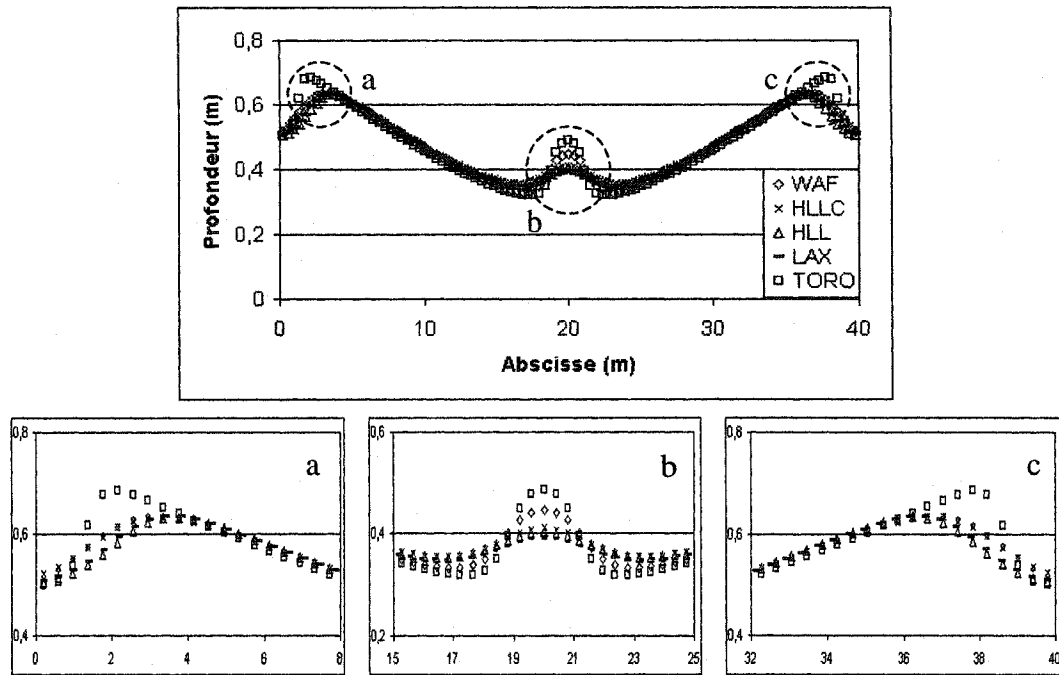


Figure 49 Barrage circulaire - Maillage rectangulaire, $t_s = 4,7\text{sec}$

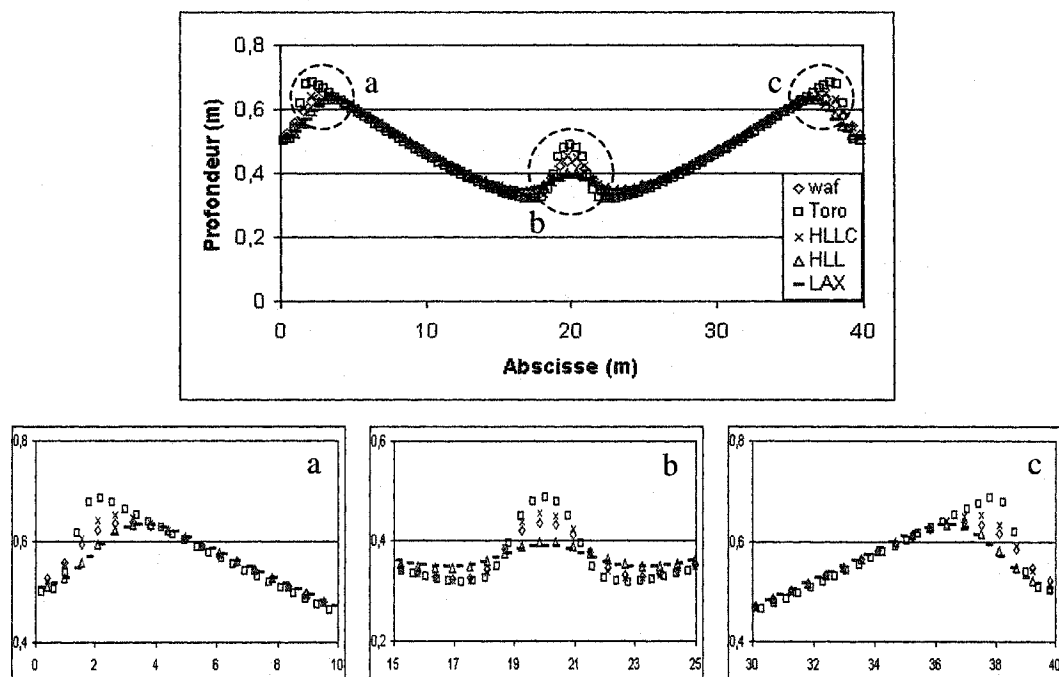


Figure 50 Barrage circulaire - Maillage forme (a), $t_s = 4,7\text{sec}$

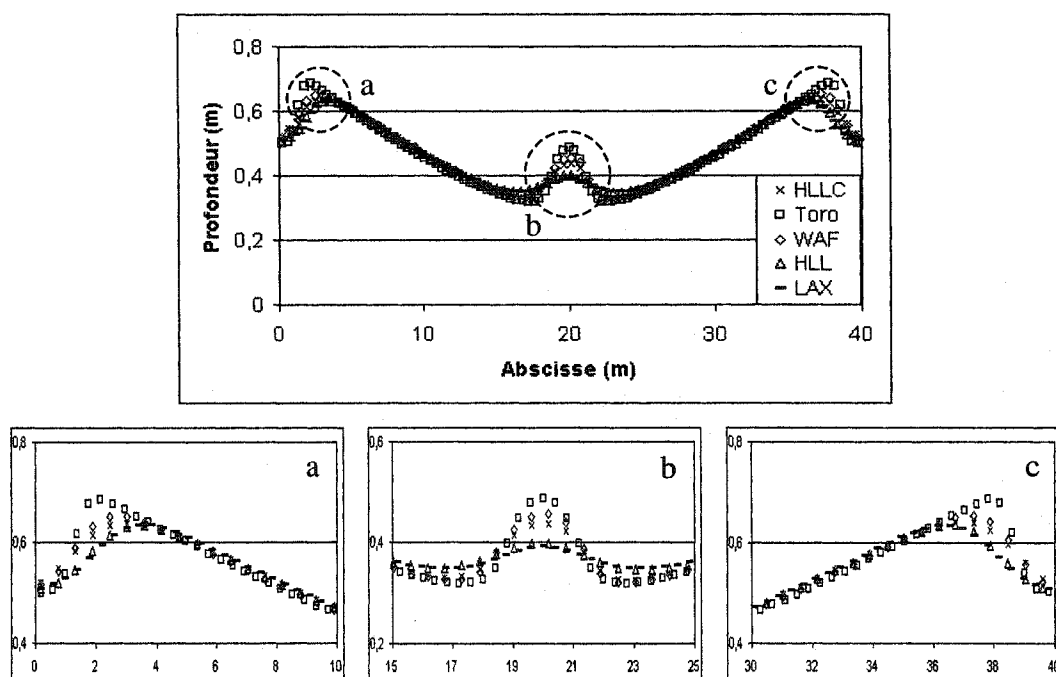


Figure 51 Barrage circulaire - Maillage forme (b), $t_s = 4,7\text{sec}$

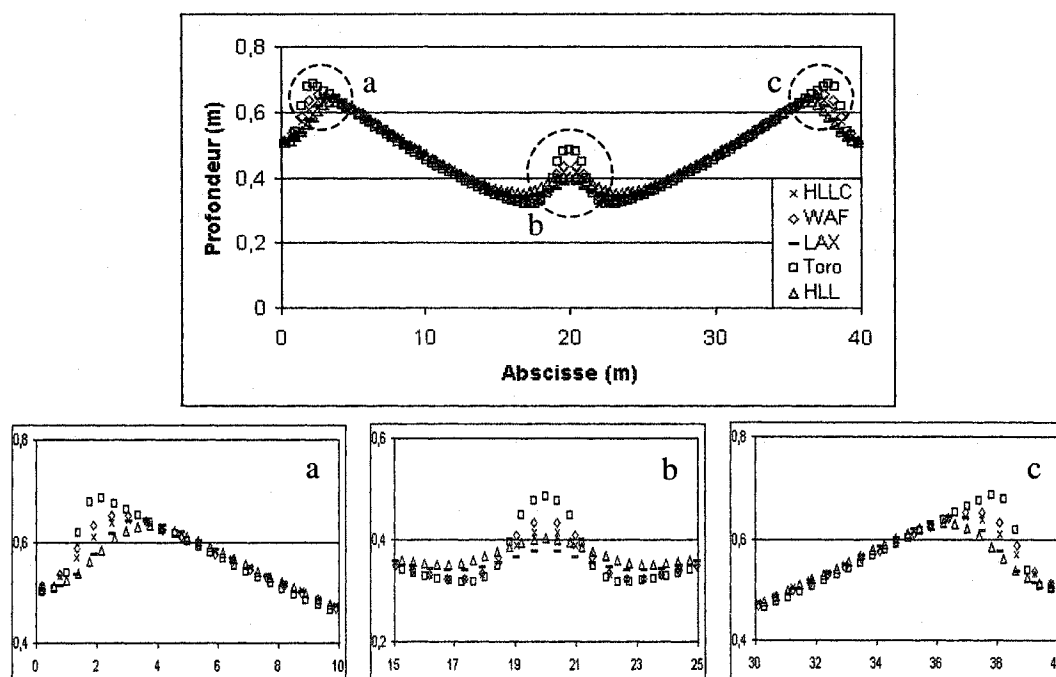


Figure 52 Barrage circulaire - Maillage forme (c), $t_s = 4,7\text{sec}$

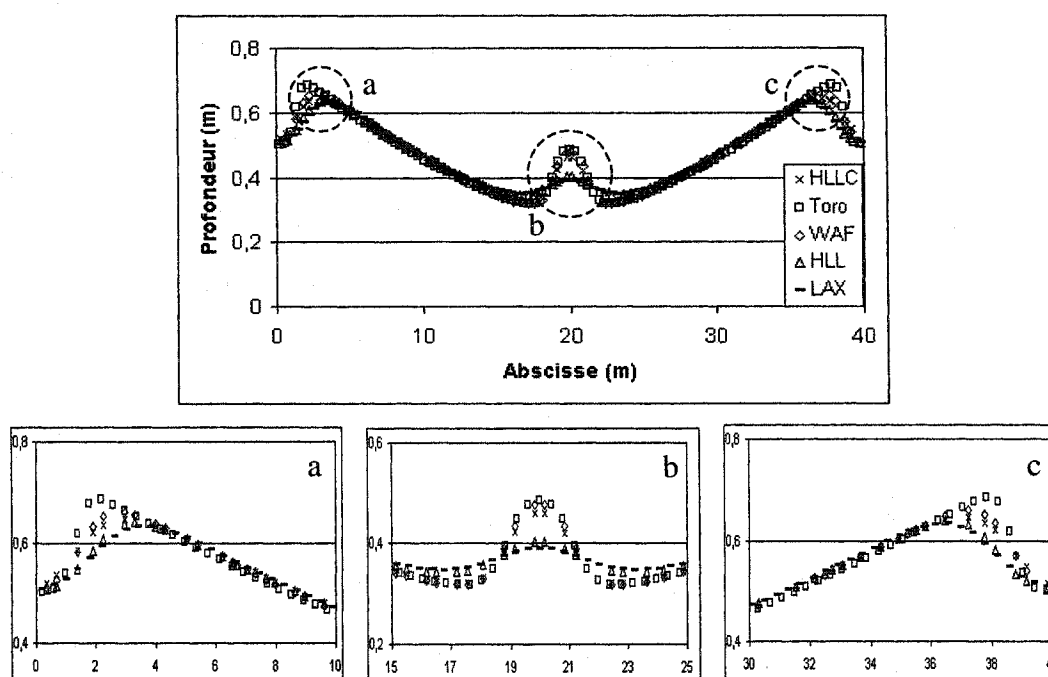


Figure 53 Barrage circulaire - Maillage aléatoire, forme (d), $t_s = 4,7\text{sec}$

Les figures 49 à 53, illustrant la profondeur en fonction de l'abscisse x , sont obtenues en faisant une coupe à une position $y = 20\text{m}$. l'allure de chaque courbe montre, malgré une différence liée à la forme du maillage, une bonne captation de la propagation de l'onde. Il en relève aussi une différence dans la précision du résultat liée directement aux différentes approches utilisées pour estimer le flux à l'interface de l'élément. Le temps de calcul pour une simulation de durée 4.7 secondes, est plus grand en adoptant l'approche 'WAF'. La méthode 'Lax-Friedrichs' se distingue d'être la plus rapide à livrer le résultat pour ce même temps de simulation.

Tableau III

Barrage circulaire, temps de calcul pour une simulation de 4.7 sec

Méthode de calcul de flux	Lax-Friedrichs	HLL	HLLC	WAF
Temps de calcul (min)	6.2014	7.353	10.51108	18.2503

3.5 Problème du réservoir, avec un canal incliné de 45° :

Plusieurs tests ont été conçus dans le but d'évaluer des modèles et des méthodes numériques destinées à l'application réelle des problèmes de bris de barrage.

Tous les tests choisis sont en général de grandes simplifications des situations réelles, et les modèles physiques sont construits dans des laboratoires de mesures.

L'expérience que nous traitons dans cette partie, entre dans l'ensemble des tests réalisés dans le cadre de l'« Action Concertée dans la Modélisation des Bris de Barrages » : «CADAM» (Concerted Action on Dam-Break Modelling, 1996-1999). La construction du modèle ainsi que la réalisation de l'expérience ont été effectuées par le professeur Y. Zech et collaborateurs [23], à l'Université Catholique de Louvain en Belgique.

Le domaine d'étude consiste à un réservoir rectangulaire connecté à un canal qui forme un angle de 45° , (figure 55). La dimension du réservoir est de 2.39m x 2.44m, la largeur du canal est de 0.459m, et la longueur est d'environ 8m. Le réservoir et le canal sont horizontalement connectés par une rampe (step) vertical de hauteur de 0.33m, comme le montre la figure suivante.

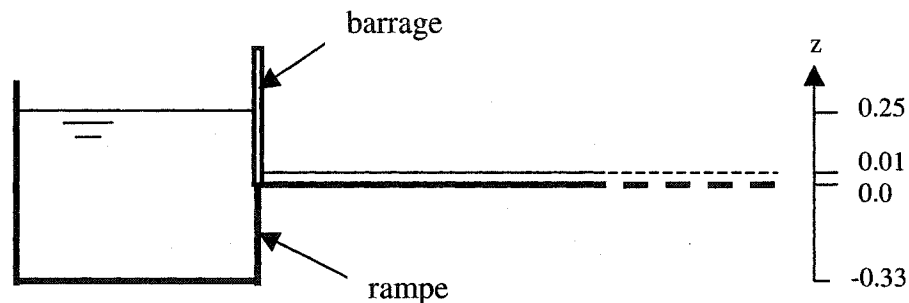


Figure 54 Vue plane du profil de l'entrée

En se donnant un point de la géométrie le point de référence dans le plan (x,y), la géométrie du modèle physique est donnée par les dix points du tableau III.

Neufs jauges de mesures sont placées à différents endroits pour mesurer le niveau de la surface libre en fonction du temps. Les coordonnées des positions des jauges sont données par le tableau IV.

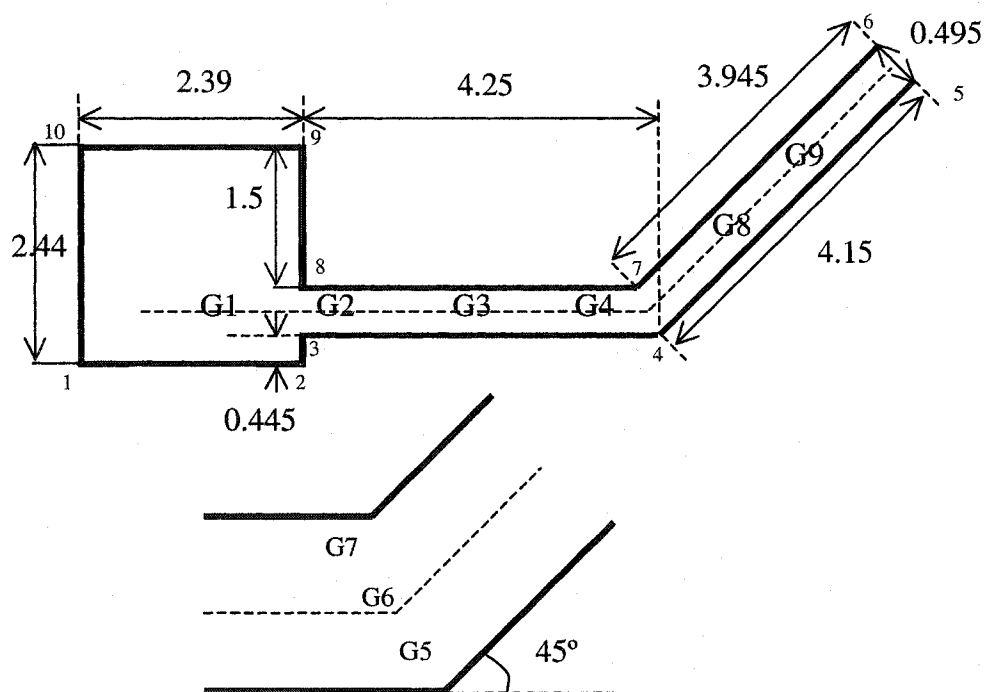


Figure 55 Géométrie du réservoir vue dans le plan x – y

Tableau IV

Coordonnées des points formant la géométrie du réservoir.

Numéro des points, k	x_k , m	y_k , m
1	0.0	0.0
2	2.39	0.0
3	2.39	0.445
4	6.64	0.445
5	9.575	3.38
6	9.225	3.73
7	6.435	0.94
8	2.39	0.94
9	2.39	2.44
10	0.0	2.44

Tableau V

Coordonnées des neufs jauges de la figure 55

Numéro des jauges, k	x_k , m	y_k , m
1	1.59	0.69
2	2.74	0.69
3	4.24	0.69
4	5.74	0.69
5	6.74	0.72
6	6.65	0.80
7	6.56	0.89
8	7.07	1.22
9	8.13	2.28

Le terme source dans l'équation d'eau peu profonde est exprimé comme suit :

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(-h \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{u|u|}{C^2} \right) \\ g \left(-h \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{v|u|}{C^2} \right) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

où C désigne le coefficient de Chézy et son expression est la suivante :

$$C = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{N}; \quad (3.2)$$

Pour ce problème, nous avons considéré un coefficient de friction N de valeur de $0.01 \text{s.m}^{-1/3}$. En l'absence d'une pente, ou d'une variation de la surface du fond du réservoir et du canal, le terme source se simplifie en s'écrivant :

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(-\frac{u|u|}{C^2} \right) \\ g \left(-\frac{v|u|}{C^2} \right) \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

Le terme source sera expliqué en détails dans le chapitre 4.

Les conditions initiales du problème sont :

- Vitesse nulle partout.
- Hauteur d'eau dans le réservoir : 0.25m
- Hauteur d'eau dans le canal : 0.01m

Le maillage utilisé, est un maillage triangulaire aléatoire, et le nombre d'élément fourni par le maillage est de 25033 éléments. Nous avons utilisé un pas de temps constant d'une valeur de 0.002sec. Les résultats ont été relevés après des temps de simulation de 0.5 sec, de 4 sec, et de 40 sec. Les résultats obtenus font figure d'une comparaison avec la solution de Toro [28], ainsi qu'avec la solution expérimentale relevée du laboratoire de l'Université Catholique de Louvain, (figure 55).

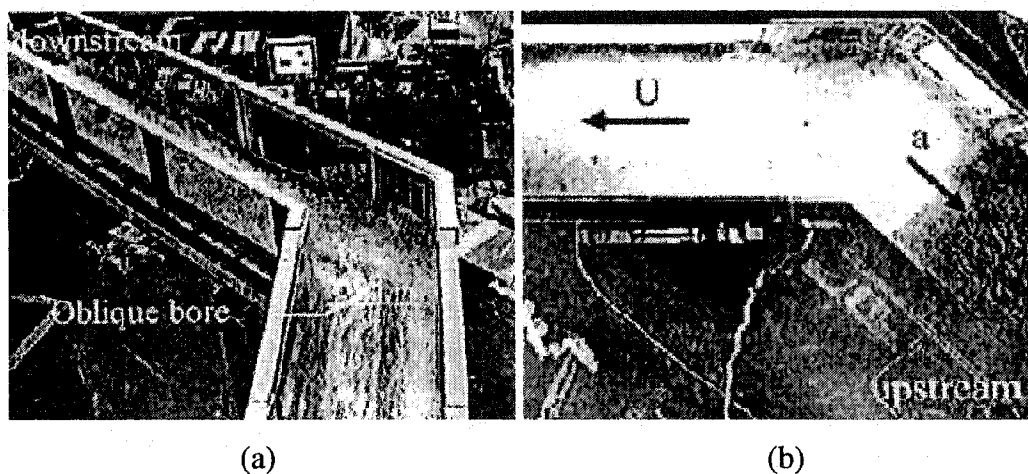


Figure 56 Photos de l'expérience : Vu en amont (a) et du dessus (b) de la section de courbure

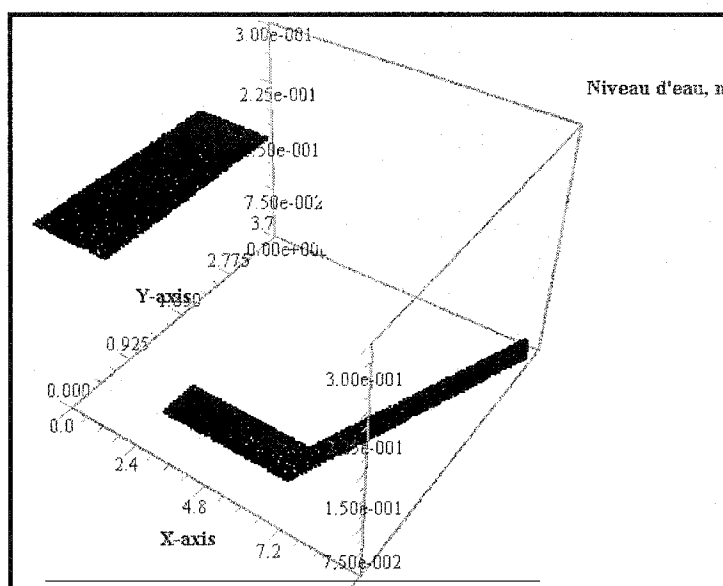


Figure 57 Problème du réservoir – conditions initiales.

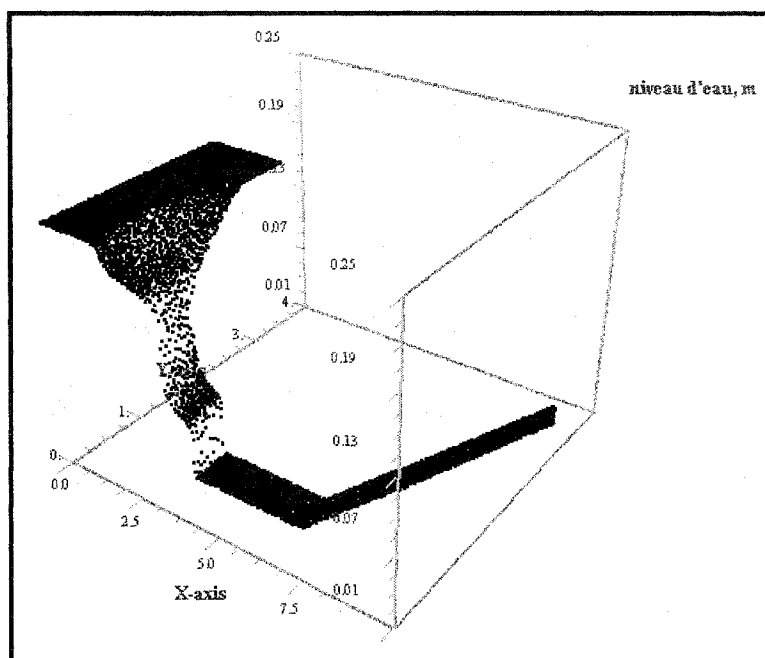
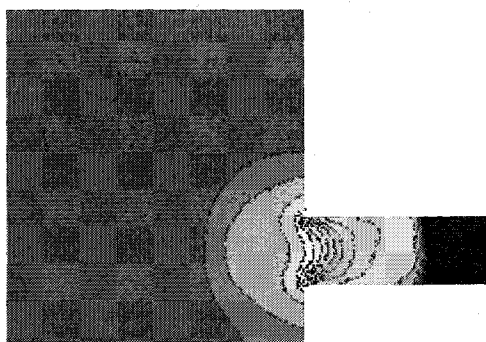
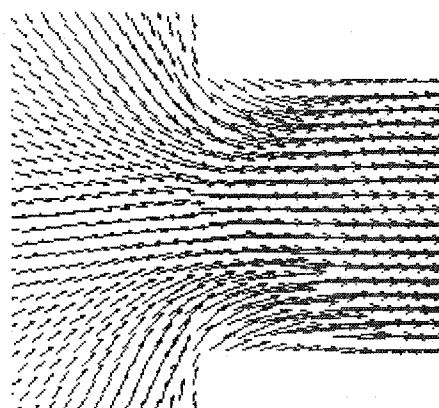


Figure 58 Résultat de la simulation après 0.5 sec



(a)



(b)

Figure 59 Visualisation du niveau d'eau (a), et de la vitesse(b), à la sortie du réservoir après 0.5 sec

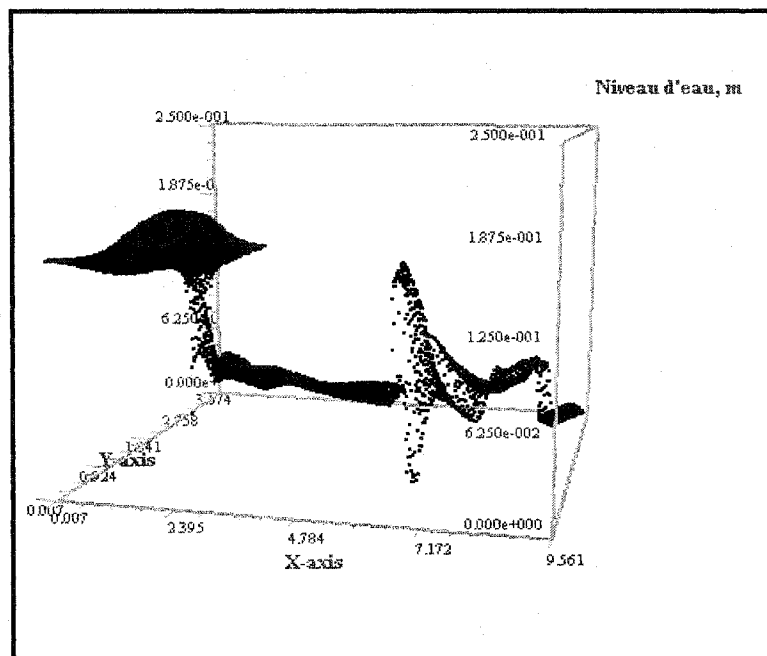


Figure 60 Résultat de la simulation après 4 sec

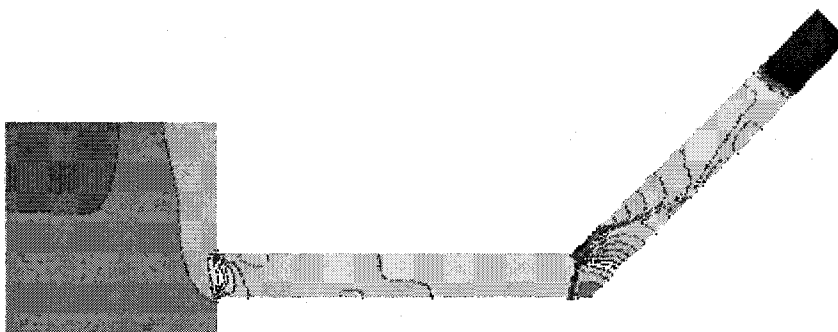


Figure 61 Visualisation du niveau de la propagation de l'onde après 4 secondes

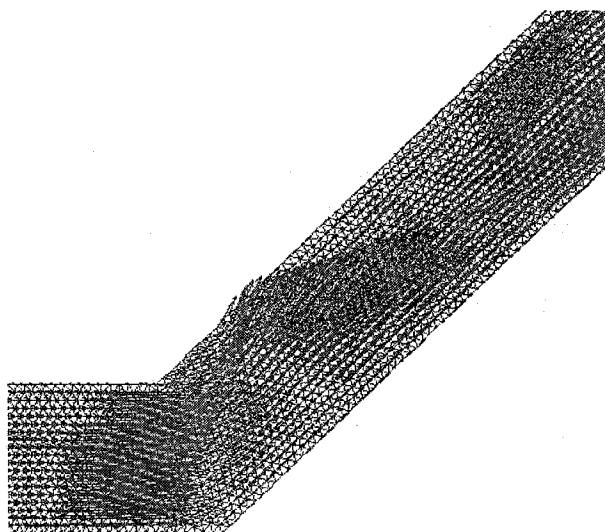


Figure 62 Visualisation de la vitesse de propagation de l'onde auprès de la courbure de 45° après 4 secondes de temps de simulation.

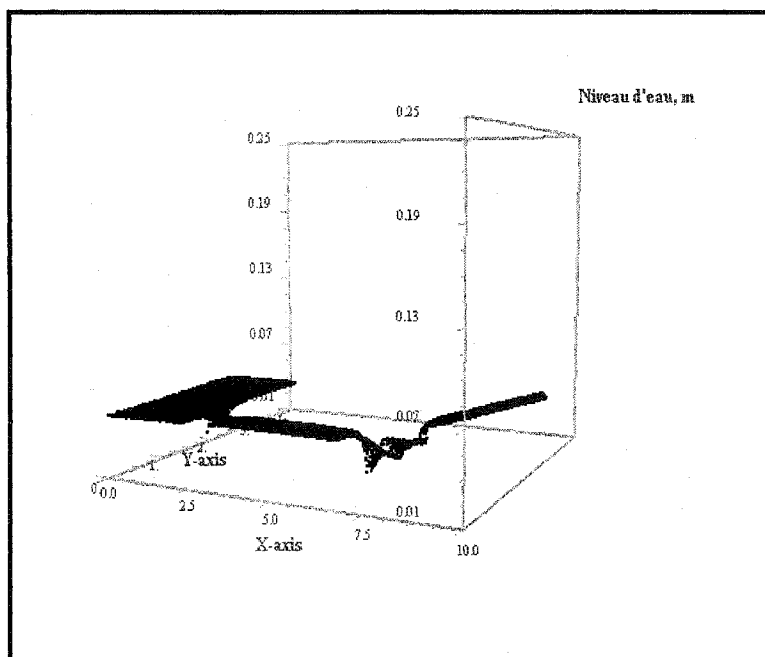


Figure 63 Résultat de la simulation après 40 sec

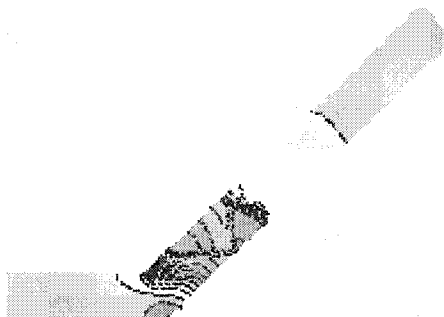


Figure 64 Visualisation du niveau de la propagation de l'onde après 40 secondes

Dans le but d'améliorer la solution, nous avons cherché à raffiner le maillage, afin de pouvoir bien visualiser la propagation de l'onde dans le canal incliné. Le résultat de la figure suivante, est issu d'un maillage de 42907 éléments :

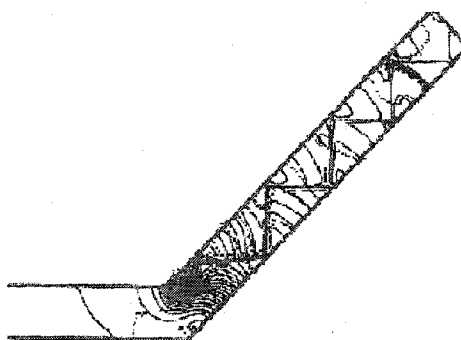


Figure 65 Visualisation du contour de la surface libre dans le canal incliné

Chaque jauge a servi pour relever le niveau d'eau à chaque pas de temps. Les figures 66 à 74 illustrent le résultat de chacune de ces jauges, en utilisant deux méthodes de calcul de flux : la méthode 'WAF' et la méthode 'HLLC'. Le résultat numérique de Toro [28], est obtenu en optant pour la méthode 'HLLC'.

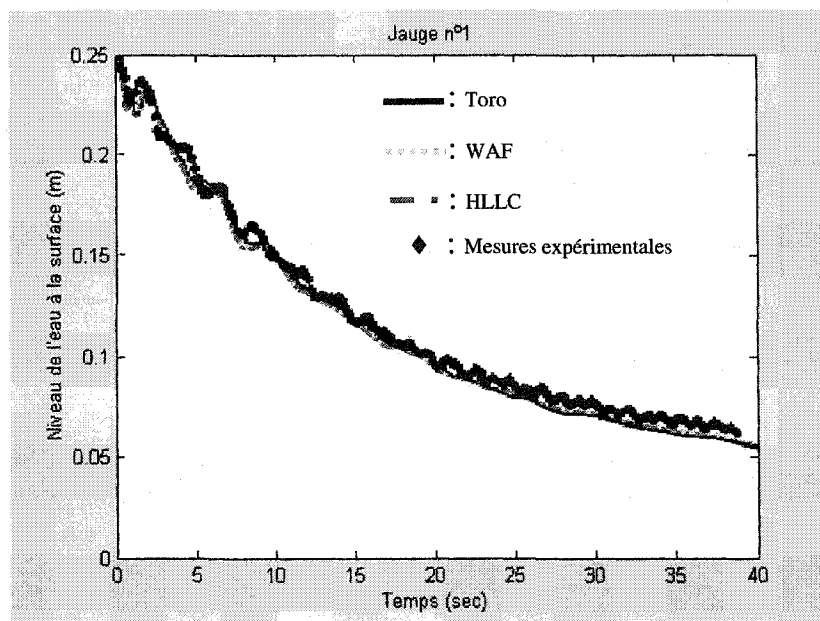


Figure 66 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°1

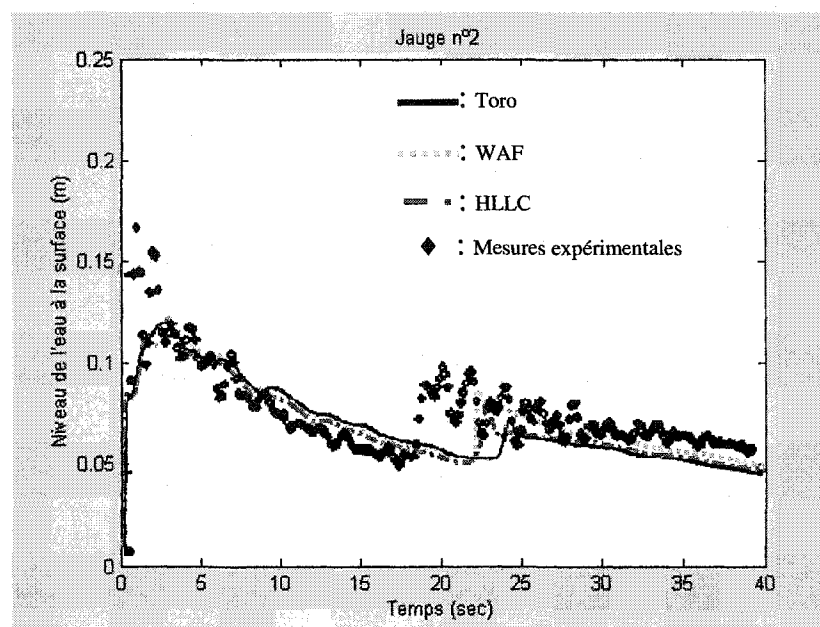


Figure 67 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°2

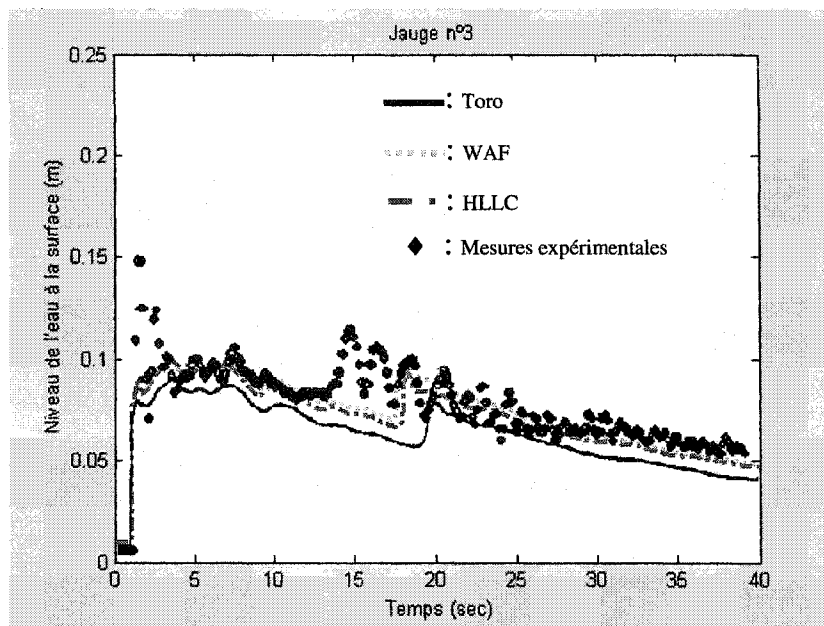


Figure 68 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°3

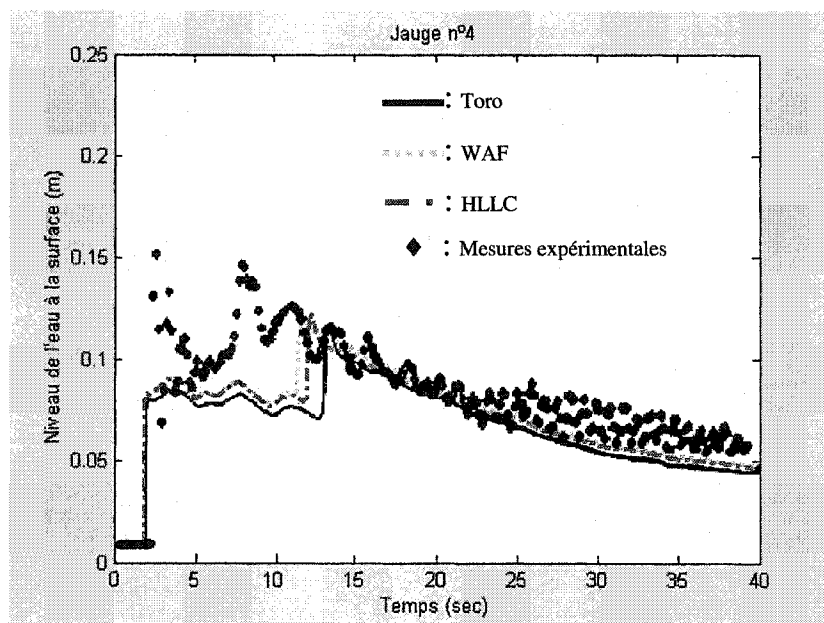


Figure 69 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°4

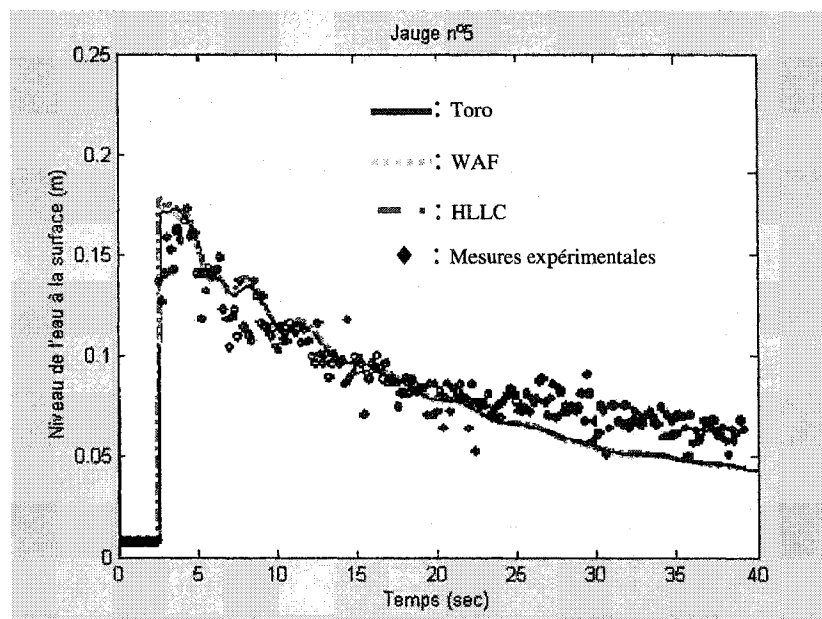


Figure 70 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°5

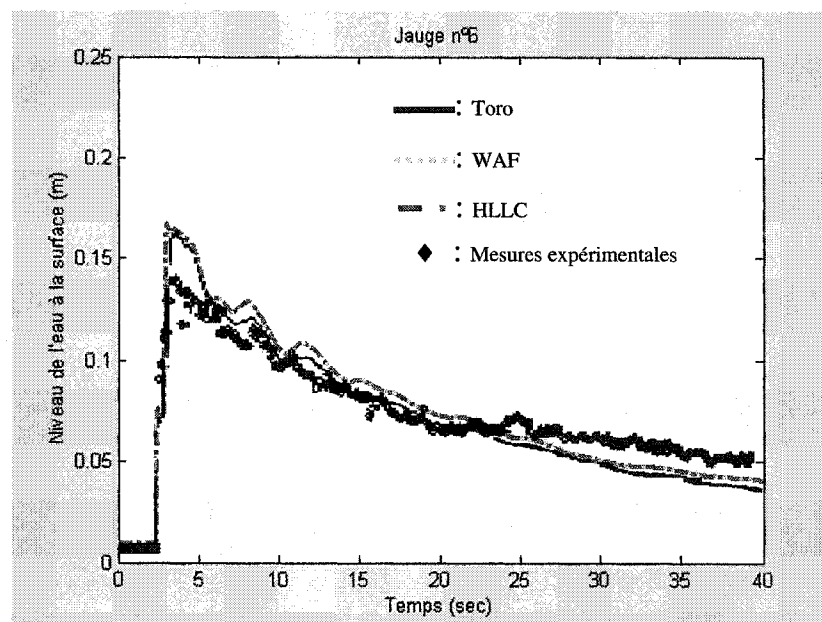


Figure 71 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°6

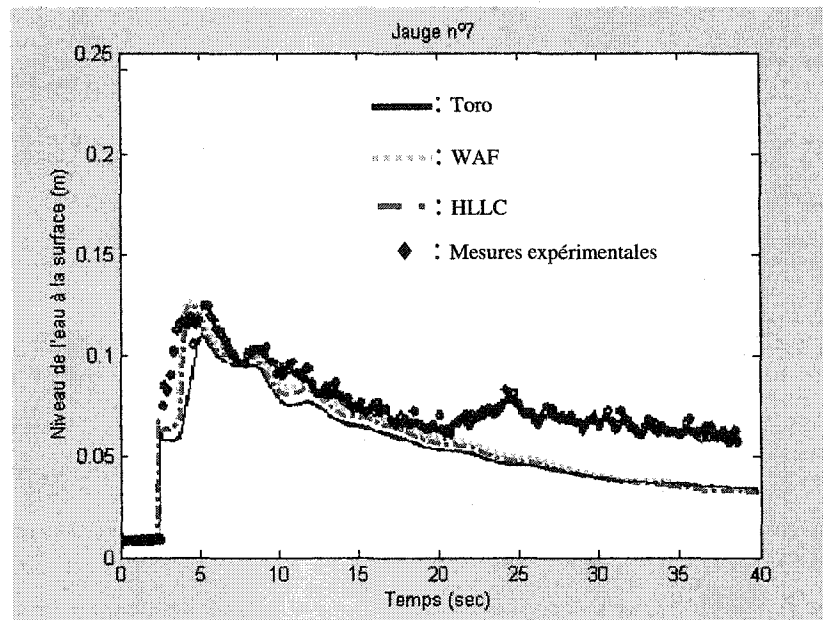


Figure 72 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°7

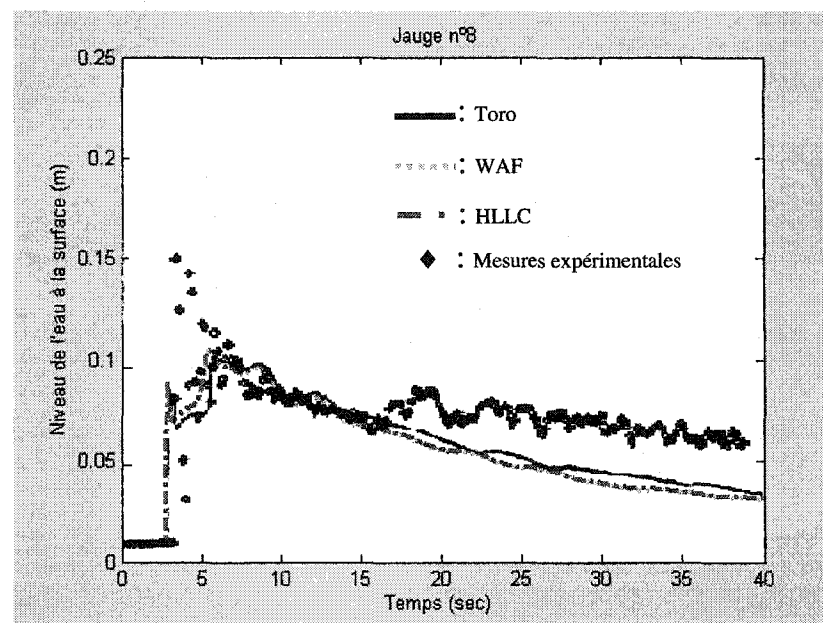


Figure 73 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°8

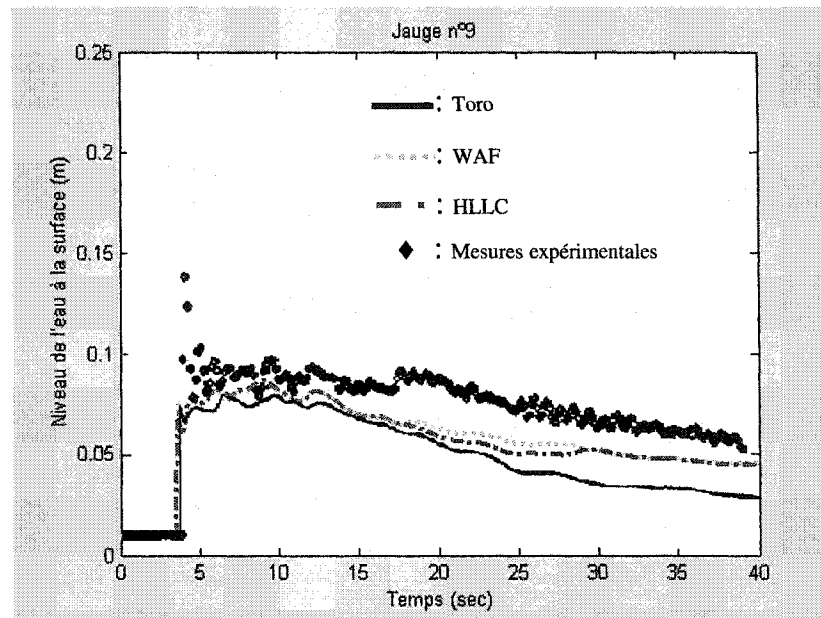


Figure 74 Problème du réservoir avec canal incliné, jauge n°9

La figure 58, montre le niveau de la surface libre à l'instant 0.5 sec. À cet instant, l'action prend place à proximité de la porte de sortie du réservoir. voir figure 59 (a) et (b). La figure 59 (a) montre une coupe du contour du niveau d'eau à cette position, où l'on peut constater une propagation de l'onde dans le canal. La figure 60 montre le niveau d'eau après 4 secondes de la simulation. Sur la figure, plus de détails peuvent être relevées à propos de l'écoulement et la propagation de l'eau dans le canal à proximité de la déviation de 45°. Par ce temps, le principal alésage a atteint la courbure, se reflète et continu à voyager le long de la deuxième section du canal. La structure de l'écoulement devient compliquée près du coin, où nous observons une interaction de l'onde de choc avec une onde de raréfaction très forte.

Les figures de 66 à 74 montrent l'historique du niveau de la surface libre le long des 40 secondes de la simulation, aux neuf positions des jauges de la figure 55. Une comparaison a été réalisée entre les résultats expérimentaux (symboles), les résultats obtenus par Toro.

Le résultat relevé de la jauge 1 est très satisfaisant, vue la similitude des quatre courbes. La figure 67 de la jauge n°2 montre l'arrivée d'une première onde de choc voyageant en aval du réservoir, et l'arrivée d'une deuxième onde reflétée de la courbure du canal. Le résultat numérique de la propagation de cette deuxième onde de choc se trouve au dessous de celui du résultat expérimental. Le même phénomène peut être observé dans l'analyse des résultats des jauges 3 et 4. Les résultats sont jugés satisfaisants lorsqu'on s'intéresse à l'arrivée de la première onde de choc, ce qui n'est pas le cas pour le retard observé pour la seconde onde reflétée. Ainsi, les jauges de 2 à 4 présentent un temps de retard pour la propagation de l'onde de raréfaction estimé à une seconde.

Les résultats des jauges 5 à 7 présentés dans les figures 70, 71 et 72 se révèlent très concluants malgré l'existence d'un décalage dans le niveau d'eau estimé à 0.025m. Au de la de 20 secondes de temps de simulation, les résultats numériques (Toro "WAF" et "HLLC") dans ces trois jauges sont presque identiques, ce qui reflète la précision de ces méthodes de bien capturer la propagation des ondes. Nous signalons également un changement dans le régime d'écoulement, passant d'un écoulement sous critique, à un écoulement plus rapide, dit supercritique, observé à la déviation entre le canal horizontal et le canal incliné, et qui est nettement illustré par la naissance des ondes de choc dans cette partie du domaine d'étude.

Dans un écoulement stationnaire dans un canal incliné, et suivant French[12], l'inclinaison de la surface libre sur une section de la courbure est donnée par l'expression suivante :

$$\delta_m = \frac{LV_m^2}{R_m g} ; \quad (3.4)$$

Où V_m représente le vecteur vitesse à travers la section, et R_m le rayon de courbure, (figure 75).

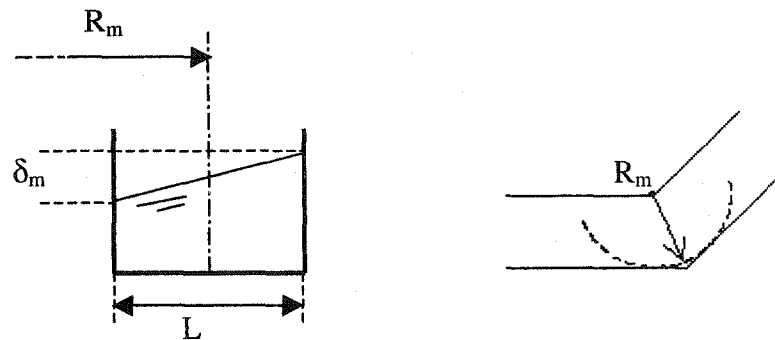


Figure 75 Définition de l'inclinaison de la surface libre.

En supposant dans ce cas que $R_m = L = 0.495$, nous pouvons estimer la différence du niveau d'eau entre les jauge n°5 et n°7.

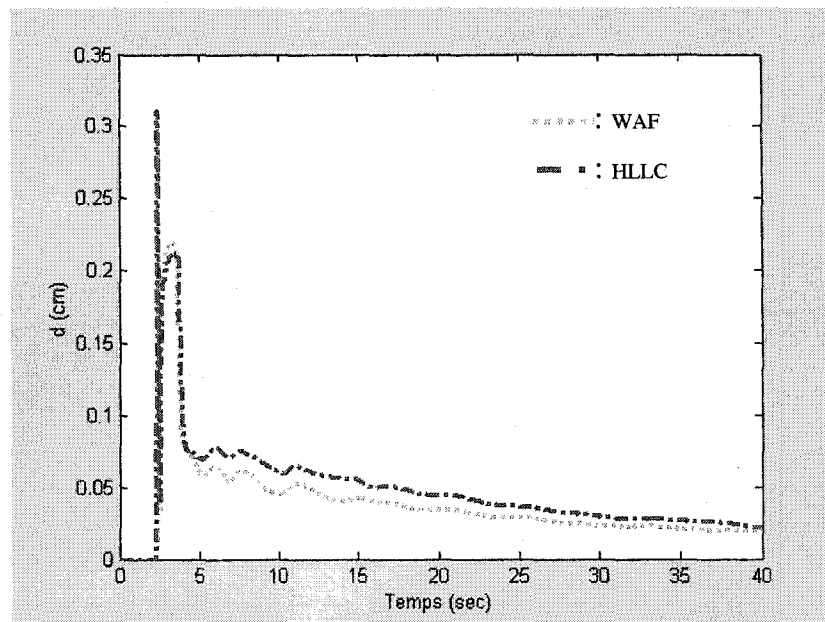


Figure 76 Différence du niveau d'eau entre la jauge n°5 et la jauge n°7.

Bien que l'écoulement soit loin d'être stable à la déviation, l'équation (3.4) donne une estimation de la pente transversale de la surface de l'eau dans la section de courbure.

Cela fournit un outil simple pour déterminer le banc d'élévation nécessaire dans un canal.

Les jauges 8 et 9 présentent également une bonne similitude dans les résultats. À noter que le résultat de Toro pour la jauge 9 semble vider plus rapidement le canal au fur et à mesure du temps, ce qui ne semble pas être le cas avec les méthodes 'WAF' et 'HLLC', qui affichent une meilleure allure du niveau d'eau par rapport au résultat expérimental. La figure 64 montre le niveau de la surface libre après 40 secondes de simulation. Après un raffinement du maillage, la figure 76 permet de révéler qu'un mal positionnement de la jauge dans le canal incliné peut induire le résultat en erreur vu la variation rapide du sens de la direction de l'onde au niveau de la surface libre.

Deux types de problème de bris de barrage ont été traités dans ce chapitre. Le premier modèle des problèmes est le bris de barrage standard et circulaire. Les résultats numériques de ces deux simulations se sont révélés très satisfaisants, et ce, pour les différents maillages utilisés. Le maillage triangulaire aléatoire a permis de relever une bonne symétrie lors du traitement du barrage cylindrique, et la méthode 'WAF' s'est distinguée par sa précision dans les résultats, malgré un temps de calcul plus long. Le deuxième type de problème traité est un modèle physique de bris de barrage, avec une géométrie variable. Les résultats numériques ont été comparés aux résultats expérimentaux, ainsi qu'aux résultats de Toro. Une bonne concordance a été relevée entre les différents résultats, ce qui nous a encouragé à traiter un cas réel que nous présentons dans le chapitre qui suit.

3.6 Problème de bris de barrage avec un lit sec :

Durant les essais que nous avons abordés dans ce chapitre, nous avons considéré que la profondeur de l'eau est strictement positive partout. Le cas d'un lit sec signifie que la profondeur de l'eau est égale à 0. C'est une situation physique dans laquelle, les

équations d'eaux peu profondes traitées dans le cadre d'une formulation conservative, ne peuvent être applicables. Le cas simple pouvant envisager ce phénomène, est un problème de bris de barrage standard où un mur représentant un barrage se trouve adjacent à une zone sèche, (figure 77).

La résolution du problème de Riemann devient ainsi différente, et la structure déjà utilisée dans le cas d'un lit humide ne peut réussir. Par exemple, dans le cas du problème de Riemann à lit humide, le traitement repose sur une évaluation de la profondeur dans la zone étoile. Dans le problème de Riemann à lit sec, la zone étoile n'existe pas.

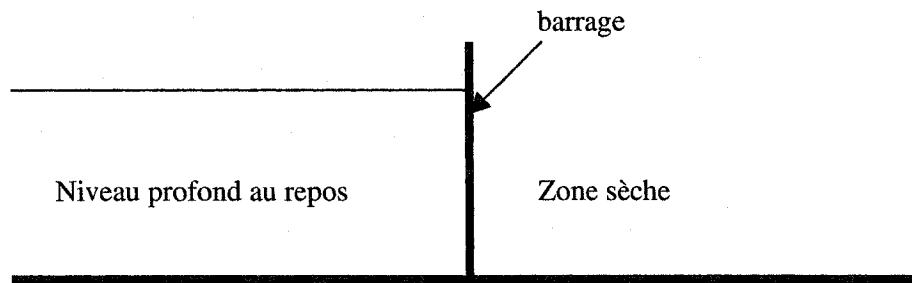


Figure 77 Problème de barrage dans le cas d'un lit sec.

La résolution de ce genre de problème nécessite un traitement spécial de chaque variable à part. Notre étude basée aussi sur une formulation conservative des équations d'eaux peu profondes, se trouve incapable de s'adapter à un problème de bris de barrage à lit sec. Dans le but de détecter la limite du code à simuler un tel problème, nous avons abordé le cas du problème de bris de barrage standard en une dimension, où il sera question de mettre le niveau aval du barrage à une profondeur négligeable. Le code a réussi à rouler avec plusieurs valeurs de h très petites à l'aval du barrage. Les conditions initiales sont une hauteur de 1.0m à l'amont, et une valeur d'essai à l'aval allant jusqu'à $h = 1E-12$ m. le domaine d'étude est de longueur 10m, et la simulation a été lancée pour un temps de 0.6sec. le pas de temps utilisé est un pas de temps variable, satisfaisant la condition CFL de 0.9 et le maillage utilisé est un maillage rectangulaire uniforme de 1000 éléments.

La formulation conservative des équations ne fait pas obstacle à la résolution comme nous le montre la figure 78, où le niveau de la profondeur est présenté en fonction de l'abscisse. En revanche, une valeur nulle de la profondeur reste une condition physique non applicable dans notre cas. L'expérience est toutefois jugée réussie, et la limite atteinte (1^E-12) peut être considérée comme un traitement d'un problème de bris de barrage à lit sec.

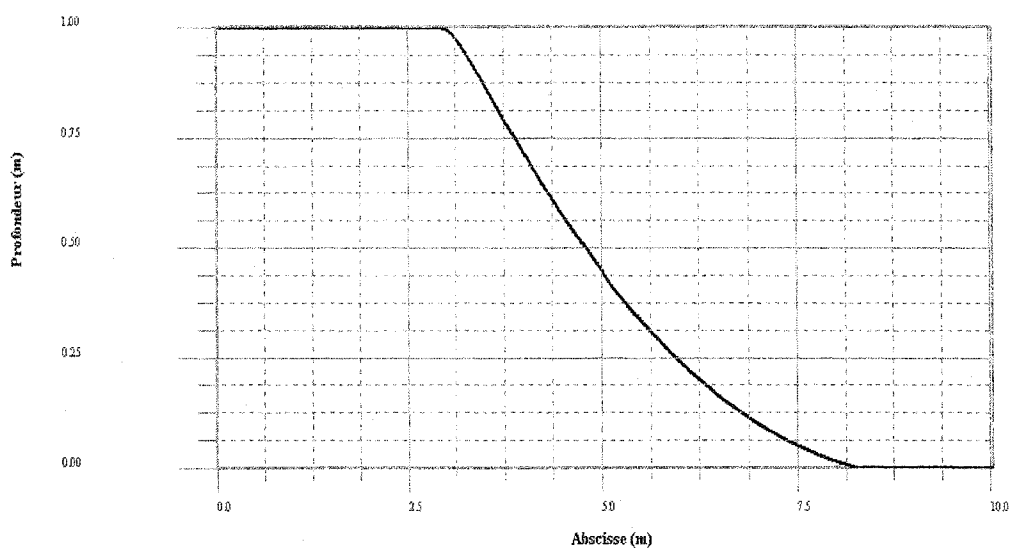


Figure 78 Problème de bris de barrage à lit sec, profil de la Profondeur – $t_s = 0.6\text{sec}$

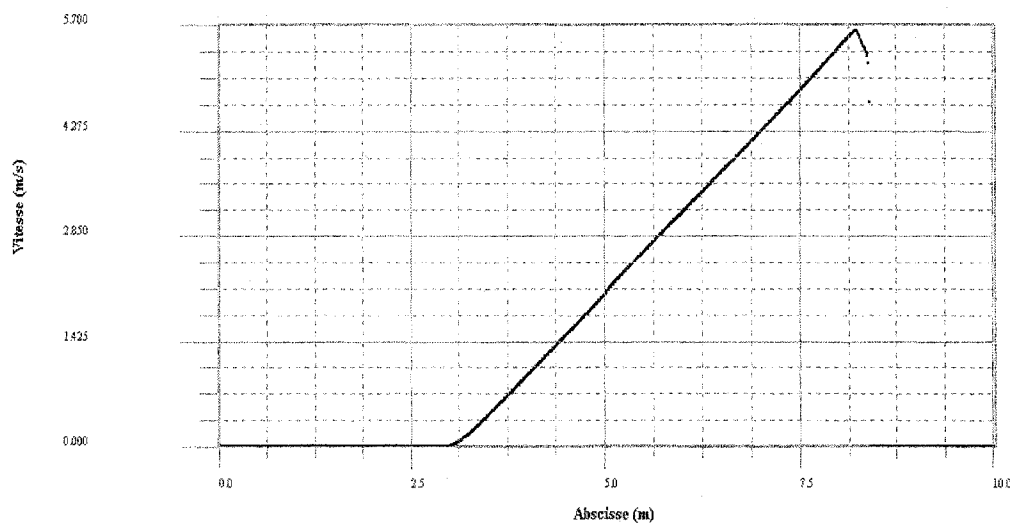


Figure 79 Problème de bris de barrage à lit sec, profil de la vitesse – $t_s = 0.6\text{sec}$

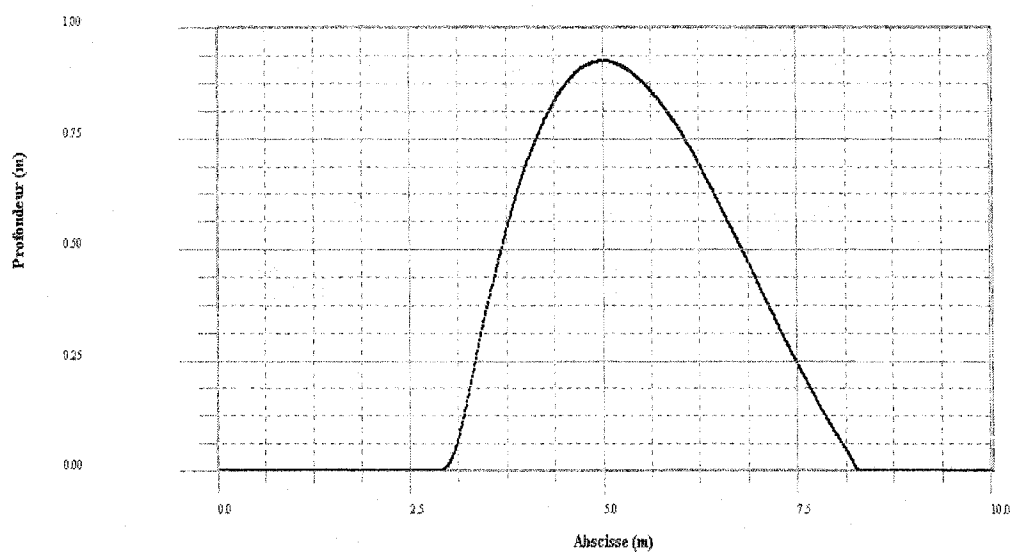


Figure 80 Problème de bris de barrage à lit sec, profil du débit – $t_s = 0.6$ sec

CHAPITRE 4

CAS RÉEL : L'ESTACADE DE BORDEAUX

4.1 Introduction :

Le problème que nous allons traiter dans ce chapitre, est un problème réel. Les données nous ont été fournis par l'établissement « Hydro-Québec ». Le cas consiste en une portion de la rivière des prairies, dont les dimensions sont illustrées dans la figure suivante :

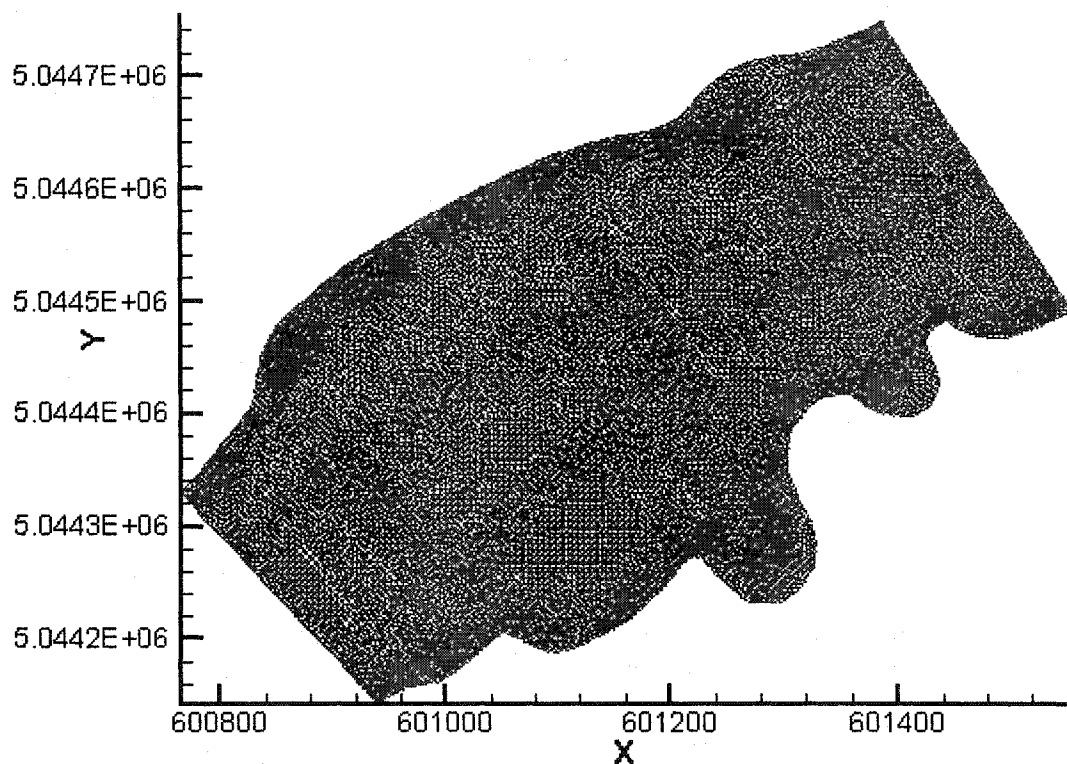


Figure 81 Dimension de la rivière vue de haut dans le plan x-y.

Le fond de la rivière est variable de façon aléatoire, ce qui rend le traitement assez complexe.

La complexité du fond a entraîné l'introduction du terme source que nous avons évoqué dans l'étude du réservoir, mais en y ajoutant un terme de gradient qui résulte du fait de la variation de la section du fond de la rivière, illustrée dans la figure 82, ainsi qu'un terme de viscosité artificielle.

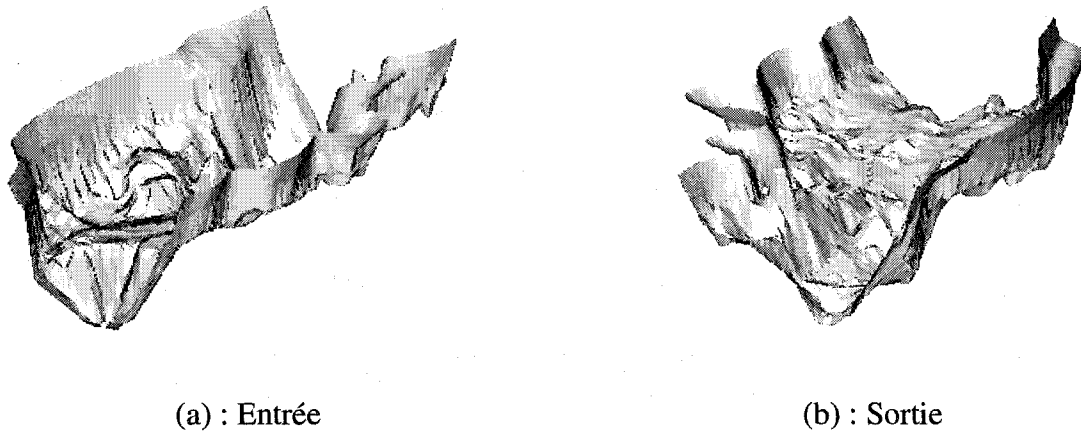


Figure 82 Visualisation de la variation du fond de la rivière

Les données que nous avons reçu concernant la géométrie du problème, contiennent une table de coordonnées, une table de connectivité, et des données concernant la répartition des zones 'ice', 'water' et 'floodplain'. Les éléments dans la table de connectivité sont des éléments avec six nœuds, ce qui nous a obligé à rapporter une modification sur le maillage en divisant l'élément en quatre autres éléments. Ainsi, une nouvelle table de connectivité a été mise en place, et le maillage est devenu plus fin contenant 25976 éléments.

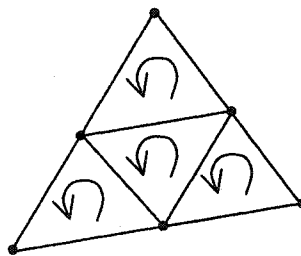


Figure 83 Nouvelle distribution des éléments, et leur sens de connectivité

Les conditions initiales imposées au problème sont un débit constant à l'entrée, et une hauteur fixe à la sortie de la rivière. Nous avons entamé notre étude avec un débit de $793\text{m}^3/\text{sec}$, et une hauteur de $17,38\text{m}$. ces deux valeurs se révèlent un test de validation.

L'équation base de notre étude, est l'équation d'eaux peu profondes :

$$U_t + F(U)_x = S(U); \quad (4.1)$$

4.2 Développement du terme source :

Le terme source de l'équation s'écrit sous la forme suivante :

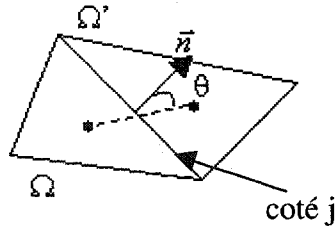
$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_{xf} \right) + S_{v1} \\ gh \left(\frac{\partial h}{\partial y} - S_{yf} \right) + S_{v2} \end{bmatrix}; \quad (4.2)$$

Où S_{v1} et S_{v2} sont deux termes de viscosité artificielle suivant les directions x et y , qui s'écrivent comme suit :

$$S_{v1} = \mu \Delta u = \mu \sum_{j=1}^{nb=3} \frac{(u_e - u_i)}{\|\vec{L}_{Gi,e}\|} \cos(\theta_j) L_j \quad (4.3)$$

$$S_{v2} = \mu \Delta v = \mu \sum_{j=1}^{nb=3} \frac{(v_e - v_i)}{\|\vec{L}_{Gi,e}\|} \cos(\theta_j) L_j \quad (4.4)$$

Où μ représente la viscosité numérique pris égale à 0.01 N.s/m^2 , $L_{Gi,e}$ la longueur de la droite qui relie les deux centroïdes des deux éléments voisins, et L_j la longueur du côté j . Le paramètre θ représente l'angle que forme la normale au côté j avec le vecteur formé par le centre de gravité de l'élément 'i', et celui de son élément voisin 'e'. (figure 84)

Figure 84 Illustration de l'angle θ

L'équation qui réagit entre le fond de la rivière et la surface libre est la suivante :

$$\eta = z + h ; \quad (4.5)$$

η représente le niveau de la surface libre, et est constant le long de l'abscisse des x et l'abscisse des y , alors :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial z}{\partial x} ; \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = - \frac{\partial z}{\partial y} ; \quad (4.7)$$

Les pentes de friction suivant x et y s'écrivent :

$$S_{xf} = \frac{u|\vec{u}|}{C^2 h} ; S_{yf} = \frac{v|\vec{u}|}{C^2 h} \quad (4.8)$$

Avec C est le coefficient de Chézy, qui s'écrit en fonction de la profondeur h , et du coefficient de friction N :

$$C = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{N} ; \quad (4.9)$$

Nous avons imposé une condition dans le choix de la valeur de N. Pour une hauteur d'eau effective au dessous de 1 m, le paramètre N prend la valeur de $0.05 \text{ s.m}^{-1/3}$. pour une hauteur supérieur à 1m, la valeur de N sera prise égale à $0.035 \text{ s.m}^{-1/3}$.

Le terme source devient :

$$S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(-h \frac{\partial z}{\partial x} \frac{u|\vec{u}|}{C^2} \right) + S_{v1} \\ g \left(-h \frac{\partial z}{\partial y} \frac{v|\vec{u}|}{C^2} \right) + S_{v2} \end{bmatrix} ; \quad (4.10)$$

L'évaluation des termes $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, a été réalisée en fonction des valeurs de z en chaque nœuds.

Pour un élément triangulaire donné, nous pouvons écrire :

$$\left. \begin{aligned} Z &= c_1 + c_2 X + c_3 Y \\ Z_1 &= Z(X_1, Y_1) = c_1 + c_2 X_1 + c_3 Y_1 \\ Z_2 &= Z(X_2, Y_2) = c_1 + c_2 X_2 + c_3 Y_2 \\ Z_3 &= Z(X_3, Y_3) = c_1 + c_2 X_3 + c_3 Y_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Ceci peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} ; \quad (4.12)$$

La résolution de ce système nécessite l'inversion de la matrice. La matrice inverse n'existe pas si deux lignes ou colonnes sont égales. Ceci arrive seulement si les nœuds

de l'élément E sont alignés. Tant que les trois sommets du triangle sont distants et non alignés, le coefficient de la matrice est inversible. Cependant, dans des calculs réels, si deux des trois nœuds sont très proches du troisième, la matrice peut être singulière, et de ce fait, numériquement inversible. Par conséquent, nous devons éviter un maillage avec des géométries étroites, (figure 85)

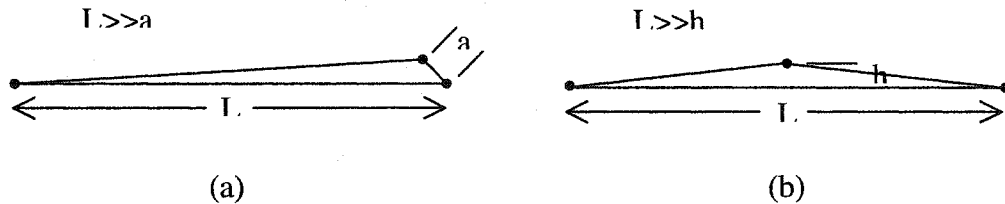


Figure 85 Géométrie triangulaire à éviter dans un maillage d'éléments finis.

L'inverse de la matrice de l'équation (4.12) est :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}; 2A_e = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \quad (4.13)$$

La résolution des c_i donne :

$$c_1 = \frac{1}{2A_e} (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3); \quad (4.14)$$

$$c_2 = \frac{1}{2A_e} (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3); \quad (4.15)$$

$$c_3 = \frac{1}{2A_e} (\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3); \quad (4.16)$$

où A_e est l'aire de l'élément 2. ($2A_e$ est le déterminant de la matrice A).

Les coefficient α_i , β_i et γ_i sont des constantes de la géométrie définis par :

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad (4.17)$$

$$\beta_i = y_j - y_k; \quad (4.18)$$

$$\gamma_i = -(x_j - x_k); \quad (4.19)$$

Les indices i, j et k se permutent dans l'ordre naturel, avec respect à : $i \neq j \neq k$.

En substituant les coefficient c_i des équations (4.14), (4.15) et (4.16) dans l'équation (4.11a), nous obtenons :

$$Z_e(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) + (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3)x + (\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3)y]; \quad (4.20)$$

$$Z_e(x, y) = \sum_{i=1}^3 z_i^e \psi_i^e(x, y); \quad (4.21)$$

Avec :

$$\psi_i^e = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y); \quad (4.22)$$

Nous pouvons ainsi écrire les expressions des termes $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ comme suit :

$$\frac{\partial z^e}{\partial x} = \frac{1}{2A_e} \sum_{i=1}^3 z_i^e \beta_i; \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial z^e}{\partial y} = \frac{1}{2A_e} \sum_{i=1}^3 z_i^e \gamma_i; \quad (4.24)$$

Notons que la fonctions Ψ a les propriétés suivantes :

$$\psi_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij}; \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (4.25)$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i^e = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} = 0; \quad (4.26)$$

L'équation (4.21) détermine une surface plane qui passe par z_1 , z_2 et z_3 . Par conséquent, l'utilisation de la fonction d'interpolation linéaire Ψ_i^e pour le triangle, résulte dans l'approximation de la surface courbée $z(x,y)$ par une fonction plane $Z_e = \sum_{i=1}^3 z_i^e \psi_i^e$. La figure 86 illustre cette approximation.

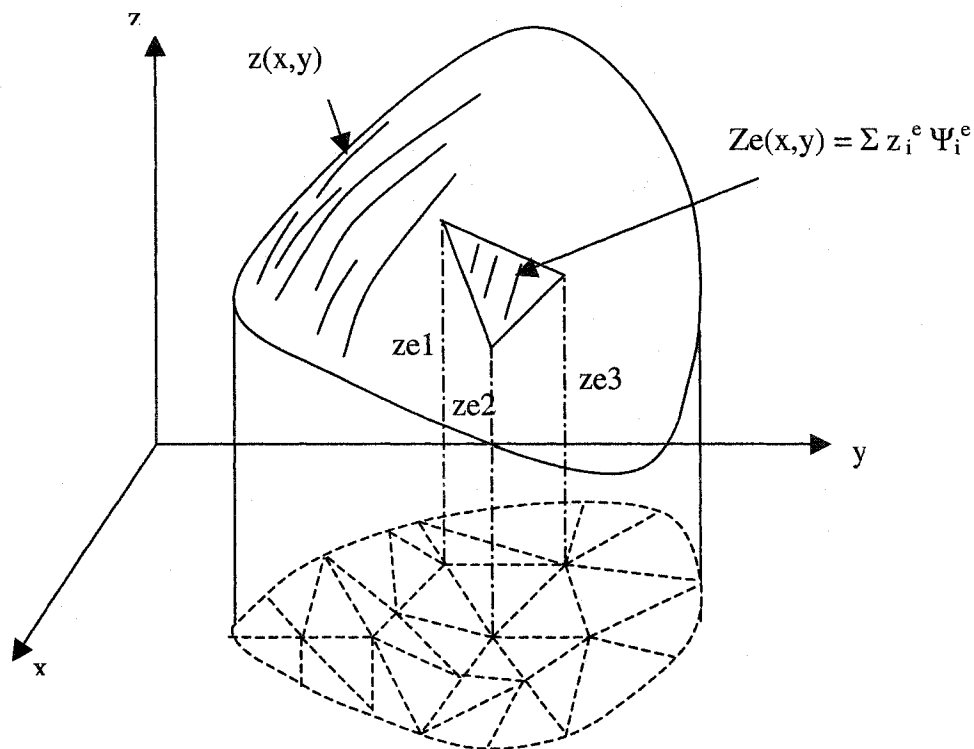


Figure 86 Représentation de la fonction continue $z(x,y)$ par une fonction d'interpolation linéaire pour un élément triangulaire.

4.3 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites que nous imposons pour cette simulation, sont un débit fixe à l'entrée, celui de $793\text{m}^3/\text{sec}$, et une hauteur η de 17.38m fixe également à la sortie. Compte tenue de cette valeur de hauteur et de la variation du fond de la rivière, il y aura

des régions qui seront sèches au départ de la simulation, ce qui entraînera une hauteur effective négative. Pour remédier à ce genre de problème, un traitement spécial a été réservé aux éléments se trouvant dans des zones sèches.

4.4 Traitement des zones sèches :

Les éléments situés dans les zones sèches (figure 87) ont été traités différemment. La nouvelle procédure consiste à attribuer à l'ensemble de ces éléments une valeur de hauteur effective figurative de 0.001m. Les composantes de la vitesse seront nulles. Les éléments qui, sur un côté donné, sont voisins à des éléments secs seront ainsi considérés dans nos calculs comme étant des éléments de frontière solide. Ce qui veut dire que le domaine d'étude comprendra uniquement la zone mouillée. Le petit trait de la figure 88 qui sépare E_m et E_s illustre la nouvelle frontière solide qui sépare les deux zones.

les paramètres de chaque élément de la zone sèche demeurent constants le long de la simulation. La hauteur d'eau effective gardera la valeur de 0.001m, et les deux composantes de vitesse seront considérées nulles. Ainsi, le côté j sur la figure 88, séparant l'élément sec E_s et l'élément mouillé E_m , obéit à la condition au limite abordée dans la section 2.5 du chapitre 2, celle d'une frontière réfléchive.

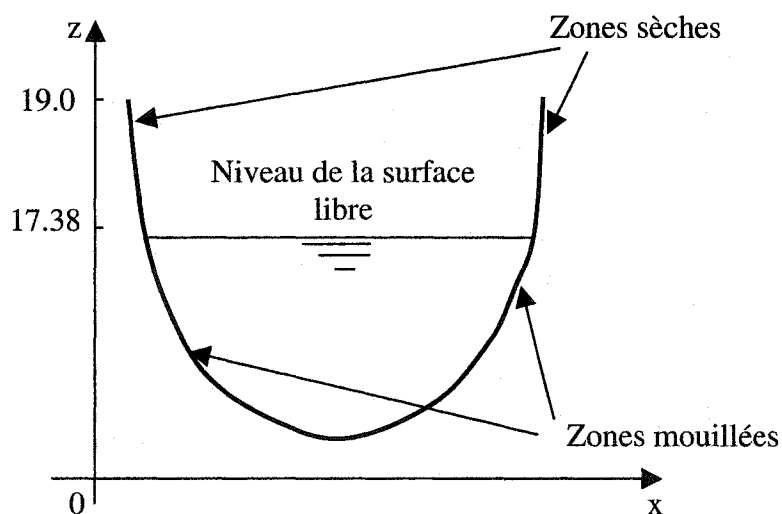


Figure 87 Illustration des zones sèches et mouillées.

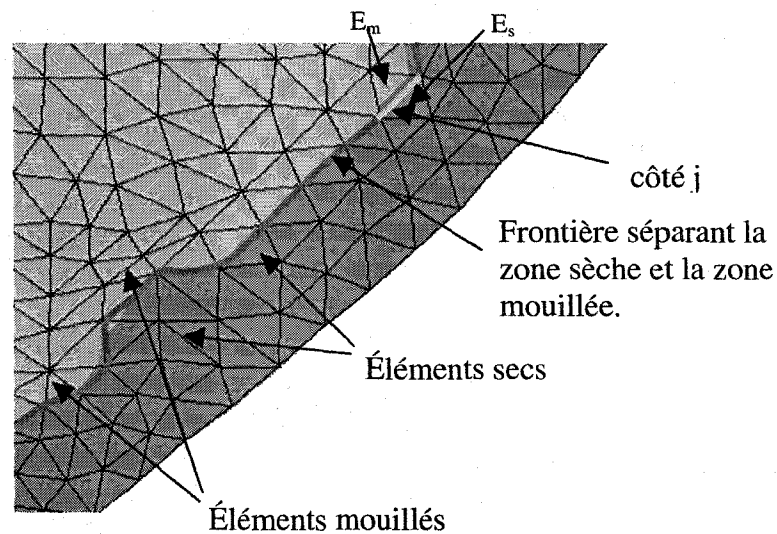


Figure 88 Nouvelle frontière solide pour les éléments mouillés

4.5 Collecte des résultats expérimentaux :

Les résultats expérimentaux ont été collecté à l'aide d'instruments sur bateau comme le montre la figure 89. l'instrument est placé sur la surface libre, et est connecté à une machine qui permet de stocker les données relevées. L'appareil utilisé est 'Acoustic Doppler Profiler' qui est très précis dans la relève des données, puisqu'il présente un pourcentage d'erreur très petit de l'ordre de 0.25%.

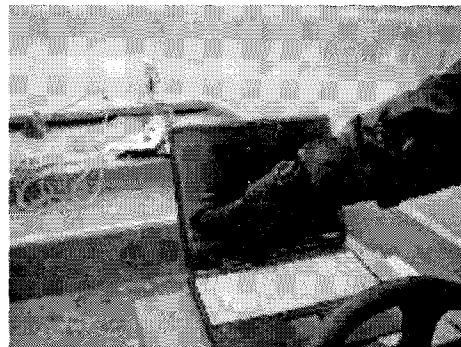
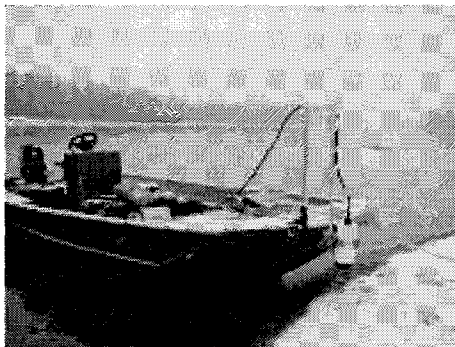


Figure 89 Collecte des résultats expérimentaux

Une autre appareil du même type peut être placé au fond de la rivière et sert à relever les valeurs des composantes de vitesse en trois dimensions à différents niveaux de profondeur, en émettant des ondes jusqu'à la surface libre (figure 90).

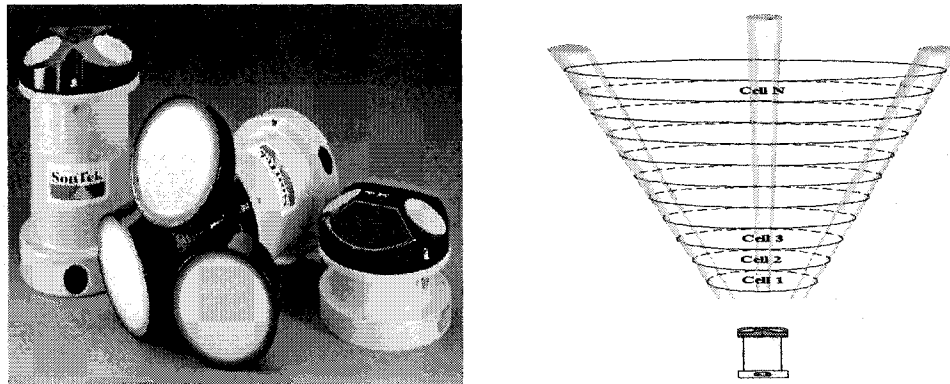


Figure 90 Acoustic Duppler Current Profiler, 'ADP'

4.6 Résultats et comparaison :

Dans la résolution de ce problème, nous avons adopté une procédure qui consiste à appliquer des quantités progressives de débit jusqu'à atteinte de $793 \text{ m}^3/\text{sec}$, la valeur de débit nécessaire pour établir une comparaison avec les résultats expérimentaux, recueillis dans les mêmes conditions. Ainsi, nous avons commencé par un débit de $100 \text{ m}^3/\text{sec}$. La solution de cette simulation obtenue après que le code ait atteint le régime permanent est utilisée pour lancer une nouvelle simulation avec une valeur de débit de $200 \text{ m}^3/\text{sec}$. La même stratégie a été suivie lorsque nous avons passé à un débit de $500 \text{ m}^3/\text{sec}$, et finalement $793 \text{ m}^3/\text{sec}$. Le pas de temps utilisé est un pas de temps variable satisfaisant la condition CFL de 0.7.

Le tableau VI illustre une comparaison entre les résultats expérimentaux et résultats numérique de notre code. La figure 91 montre la distribution de la vitesse autour de l'île située près de la sortie.

Les figures présentées en toute fin de ce chapitre, regroupées dans la figure 92, illustrent le phénomène de la propagation de l'onde le long du domaine d'étude. L'onde réfléchi lorsqu'elle atteint la sortie de la rivière, et l'application de la condition d'un débit constant à l'entrée est bien respectée.

La simulation a été lancée sur un Pentium 3 à 600 MHZ en vitesse d'exécution.

Tableau VI
Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux

Résultats du code numérique						
Résultats expérimentaux						
Élément	Profondeur h	Erreur %	Vitesse u	Erreur %	Vitesse v	Erreur %
1 - 63	17.4543 17.45919	0.02	0.4207 0.36933	13.9	0.4487 0.30715	46.1
2 - 1209	17.4415 17.46627	0.14	0.3620 0.32923	9.95	0.2608 0.50566	48.4
3 - 2083	17.4247 17.45046	0.14	0.312 0.45045	30.7	0.484 0.66722	27.4
4 - 5048	18.5141 17.99557	2.97	0.0000 -0.01300	100	0.0000 -0.00376	100
5 - 8122	17.3912 17.44682	0.34	0.2750 0.27114	1.42	0.2149 0.21761	1.24
6 - 9535	17.3876 17.42346	0.2	0.5023 0.59193	15.14	0.2719 0.38899	30.1
7 - 10887	17.4006 17.4409	0.23	0.3487 0.38369	9.11	0.1656 0.24928	33.6
8 - 16580	17.4087 17.41141	0.01	0.3727 0.42155	11.5	0.3086 0.43472	29
9 - 21751	17.3974 17.36551	0.18	0.24157 0.2178	10.9	0.74959 0.5670	32
10 - 24830	17.3683 17.37360	0.03	0.7944 0.76017	4.5	0.1918 0.32670	41.3

Le tableau représente une comparaison entre les résultats du code numérique et les résultats expérimentaux. Le pourcentage d'erreur est aussi indiqué pour chaque paramètre du problème pour un élément donné. Ce pourcentage d'erreur demeure très petits dans la comparaison de la profondeur, acceptable au niveau de la composante de vitesse u . L'erreur est plus grande lorsque nous nous intéressons à la deuxième composante de vitesse v . L'élément 5048 attire l'attention par un pourcentage d'erreur de 100 % dans les deux composantes de vitesse, tandis qu'il représente le plus grand pourcentage d'erreur au niveau de la profondeur (2.97%) par rapport aux autres éléments faisant partie du tableau de comparaison. Ceci est due au traitement des cellules sèches que nous avons adopté, et qui consiste à attribuer une vitesse nulle et une hauteur figurative de l'ordre de 0.001m. qui n'ont pas été traité tout au long de la simulation. L'élément 5048 est un élément parmi les 5434 éléments secs qui n'ont subi aucun traitement du début jusqu'à la fin de la simulation. Tandis que dans les résultats expérimentaux, cet élément est un élément mouillé, et possède deux valeurs de vitesse non nulles.

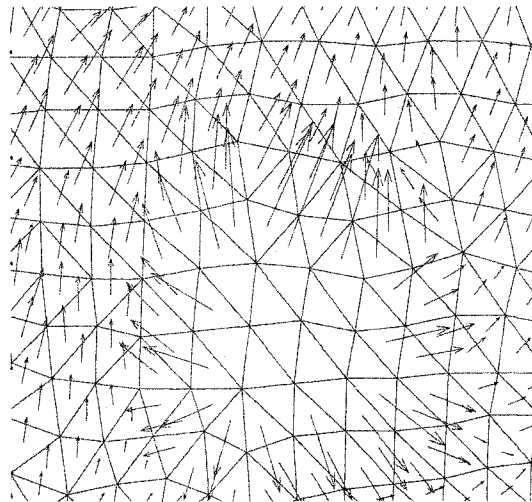


Figure 91 Profil de vitesse autour de l'île près de la sortie

Pour atteindre le régime permanent, tous les paramètres du problème doivent satisfaire à la condition de convergence qui est la suivante :

$$\frac{|q^{n+1} - q^n|}{q^n} \leq \xi \quad (4.27)$$

où ξ est la valeur tolérée pour la convergence, et prise égale à 1E-5.

q est un paramètre évalué aux instants n et $n+1$, et qui peut désigner la hauteur effective h , ou les deux composantes de la vitesse, u et v .

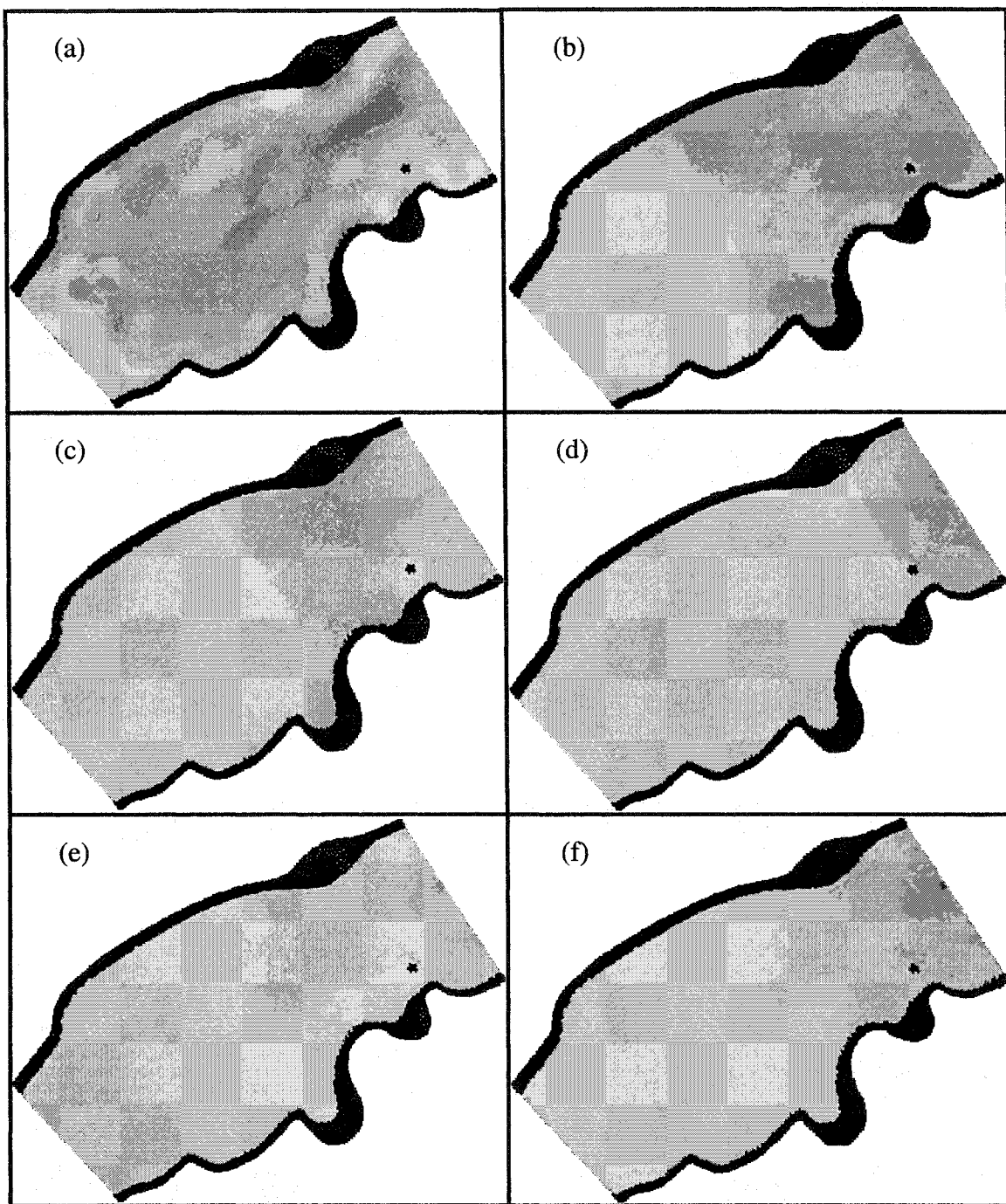


Figure 92 Observation du phénomène de la propagation de l'onde le long de la rivière.

CONCLUSION

La simulation des problèmes de bris de barrage était et est toujours une source d'intérêt majeur pour les chercheurs dans le domaine de la protection environnementale. Dans ce présent travail, motivé par le désir de porter une solution appropriée à de tels problèmes, nous nous sommes intéressés à la modélisation numérique des écoulements à surface libre. Comme première étape de ce projet, nous avons porté toute l'importance à la validation du code numérique développé, et ce, en l'appliquant à des types de problèmes de bris de barrage très connus. L'étude a été ensuite étendue au traitement d'un cas réel.

Le modèle mathématique est basé sur la formulation des équations d'eau peu profonde en deux dimensions, et les problèmes initialement traités dans ce rapport ont la caractéristique d'être la base et le point de départ des fondements des codes numériques plus sophistiqués.

La méthode de Galerkin Discontinue est utilisée pour la résolution numérique des équations d'eaux peu profondes. Elle se distingue par sa caractéristique de traiter chaque élément à part, tout en tirant profit de la flexibilité de la géométrie dans la méthode des éléments finis.

La discrétisation des équations est basée sur une formulation conservative des paramètres, et la stabilité du schéma est assurée en adoptant le schéma Runge-Kutta du quatrième ordre.

La solution du problème de Riemann a été approximée par l'adoption de quatre méthodes numériques de calcul de flux aux interfaces de l'élément. Nous avons fait appel à la méthode 'Lax-Friedrichs' qui fait partie de la famille des méthodes centrées, ainsi que trois autres méthodes descendantes de la famille des méthodes décentrées, qui

sont la méthode 'HLL' (Harten, Lax and Van Lerr), la méthode 'HLLC' (Harten, Lax and Van Lerr 'Contact'), et la méthode 'WAF' (Weighted Average Flux).

Le problème de bris de barrage standard en une dimension a été notre premier test de validation. Le résultat de chaque problème a été présenté pour chaque méthode utilisée pour l'évaluation du flux. Un léger avantage a été observé pour la méthode 'WAF', qui présente une meilleur adhésion par rapport à la solution exacte. Cependant, toutes ces méthodes se sont révélées satisfaisantes. Ainsi, le cas bidimensionnel de ce même type de problème a été abordé.

Notre étude en deux dimensions s'est enrichi par l'ajout de la notion type de maillage. Ayant opté dans le cas unidimensionnel pour un maillage quadratique structuré et uniforme, nous avons procédé à l'introduction du type de maillage triangulaire dans sa forme structurée et aléatoire.

Certaines parties des graphiques où les résultats de la simulation ont été présentées, la comparaison était moins clair vu de la concordance des résultats. Une légère différence est observée si nous portons une grande importance à l'onde de raréfaction, où le type de maillage triangulaire structuré offre un résultat meilleur.

Le problème de bris de barrage cylindrique est un autre modèle des problèmes que nous avons traité. Une des caractéristiques fondamentale dans ce type de problème est que la solution de la profondeur est toujours symétrique. Ce principe n'a pas été respectée lorsque le type de maillage triangulaire structuré a été utilisé. Toutefois, le même type de maillage dont la forme est aléatoire offre une symétrie parfaite. L'écart entre les méthodes numériques employées dans le but d'évaluer le flux se fait distingué, et la méthode 'WAF' et 'HLLC' sont les deux à offrir une solution meilleure quelque soit le type et la forme du maillage.

Le dernier problème choisi pour la validation du code, est un modèle physique de bris de barrage, tiré d'une expérience effectuée dans le laboratoire Louvain en Belgique. Utilisant la méthode 'WAF' et 'HLLC' dans l'évaluation du flux, le code s'est vu robuste et capable de détecter les chocs, et surtout, bien suivre la propagation de l'onde malgré une géométrie variable du domaine. Le succès qui entoure la reproduction des phénomènes observés dans ce problème, ainsi que dans les deux premiers tests, nous a été d'une grande motivation pour aborder une étude d'un cas réel.

L'estacade de Bordeaux sur la rivière des prairies est le problème réel face au quel, notre code devait prouver sa robustesse et sa capacité de traiter avec soin, les différents types de problèmes liés aux écoulements à surface libre.

Dans la grande majorité de ces écoulements, il est indispensable de prendre en considération le phénomène des bancs couvrant – découvrant. Nous avons maintenu la même formulation sur l'ensemble du domaine modélisé même si une partie de celui-ci est à sec ou exondé. Dans le domaine discrétisé, on retrouve ainsi des éléments secs (découverts), partiellement découverts ou mouillés (couverts).

L'étude du phénomène des bancs couvrant - découvrant n'a pas été complétée, mais les résultats obtenus sont satisfaisants, et très encourageants. La comparaison avec les résultats expérimentaux illustrent une bonne concordance au niveau de la profondeur et de la vitesse. L'erreur affichée par la deuxième composante de la vitesse peut être réduite si l'étude du phénomène des bancs couvrant – découvrant a été complétée.

D'après les diverses applications sur des problèmes de bris de barrage, ainsi que le problème réel « Estacade de Bordeaux », le code numérique développé a ainsi prouvé une grande capacité à traiter, avec soin, différents problèmes liés aux écoulements à surface libre, et ce, qu'elle que soit la géométrie du domaine.

ANNEXE I

RAPPELS ET DÉFINITIONS

(a) Système hyperbolique :

Soit un système de m équations des lois de conservation suivant :

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0 \quad (1)$$

On définit par A et B deux matrices Jacobéennes, tel que :

$$A(U) = \frac{dF}{dU} ; B(U) = \frac{dG}{dU} \quad (2)$$

Le système (1) est dit hyperbolique si la matrice C formée par une combinaison linéaire des deux matrices Jacobéennes A et B et écrite sous la forme suivante :

$$C = w_1.A + w_2.B \quad (3)$$

a m valeurs propres et m vecteurs propres pour tout vecteur de variables conservatives et tout vecteur $W = [w_1, w_2]$ non nul. Le système est dit strictement hyperbolique si toutes les valeurs et vecteurs propres sont distincts.

(b) Système homogène :

Considérons le système d'équation d'équations en une dimension suivant :

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (4)$$

Où U est un vecteur de variables conservatifs, et F(U) le vecteur flux interne, donnés respectivement par :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} ; F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} \quad (5)$$

Le système est dit homogène si la propriété suivante est vérifiée :

$$F(U) = A(U)U \quad (6)$$

Le système des équations d'eau peu profonde ne satisfait pas cette propriété.

- Démonstration :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2}{u_1} + \frac{1}{2}gu_1^2 \\ \frac{u_2u_3}{u_1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A(U) = \frac{dF(U)}{dU} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2}{u_1^2} + gu_1 & \frac{1}{u_1} & 0 \\ -\frac{u_2u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A(U)U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2}{u_1^2} + gu_1 & \frac{1}{u_1} & 0 \\ -\frac{u_2u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2}{u_1} + gu_1^2 \\ \frac{u_2u_3}{u_1} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2}{u_1} + \frac{1}{2}gu_1^2 \\ \frac{u_2u_3}{u_1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A(U)U \neq F(U) \quad (11)$$

Le système (4) est alors non homogène.

(c) Système linéaire :

Le système (4) est dit linéaire si les composantes a_{ij} de la matrice $A(U) = \frac{dF(U)}{dU}$ sont des constantes. Si $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$, le système est dit linéaire avec des coefficients variables. Le système est dit quasi-linéaire si les coefficients a_{ij} s'écrivent en fonction des composantes du vecteur des variables conservatives U , ce qui revient à écrire $A = A(U)$. Un système quasi linéaire est considéré comme un système non linéaire.

(d) Schéma monotone :

Un schéma de la forme :

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-l_L}^n, \dots, u_{i+l_R}^n) = \sum_{K=-l_L}^{l_R} b_K u_{i+K}^n \quad (12)$$

Est dit monotone si les coefficients b_K sont positifs ou nuls.

Les schémas monotones sont la base des schéma moderne, et sont dans la plupart précis d'ordre 1.

(e) Théorème de 'Roe' :

Un schéma de la forme (12) est précis d'ordre p dans l'espace et dans le temps, si et seulement si :

$$\sum_{K=-l_L}^{l_R} K^q b_K = (-c)^q, \quad 0 \leq q \leq p \quad (13)$$

Où c est le coefficient CFL (Courant-Friedrichs-Levy).

(f) Schéma décentré :

Un schéma est dit décentré (Upwind) si la discrétisation a été performée selon le sens de la propagation de l'onde dans l'équation différentielle. Ainsi, la différentiation spatiale est effectuée en utilisant les points du maillage du côté où provient l'information.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. L. Atkins, C-W. Shu. Analysis of the Discontinuous Galerkin Method Applied to the Diffusion Operator. 14th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 28-31 June 1999, Norfolk, VA
- [2] F. Bassi, S. Rebay. *A high-Order-Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations*. J. Comp. Phys., v131, n2, p. 267, 13 p. 1997.
- [3] F. Bassi, S. Rebay, M. Savini, G. Mariotti and S. Pedinotti. *A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for Inviscid and Viscous Turbomachinery Flows*. In Proc. 2nd Europ. Conf. On Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics, Antwerp, Belgium, March 5-7, 1997.
- [4] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, D. M. Causon. *On the Choice of Wavespeeds for the HLLC Riemann Solver*. SIAM Journal Scientific for Computing, v.18, n.6, pp.1553-1570, 1997.
- [5] P. Batten, U. C. Goldberg and M. A. Leschziner. Average State Jacobians and Implicit Methods for Compressible Viscous Flows. Technical Report, Dept. Of Mechanical Engineering, UMIST, UK, 1996.
- [6] C. E. Baumann, J. T. Oden. *An Adaptive-Order Discontinuous Galerkin Method for the Solution of the Euler Equations of Gas Dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.47, pp.61-73, 2000.
- [7] S. J. Billet, E. F. Toro. *On WAF-Type Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws*. Journal of Computational Physics, v.130, pp.1-24, 1997.

- [8] B. Cockburn, C.-W Shu. *The Local Discontinuous Galerkin for Time Dependent Convection-Diffusion Systems*. SIAM J. Numer. Anal., 1998.
- [9] S. F. Davis. *Simplified Second-Order Godunov-Type Methods*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., v9, pp445-473, 1988.
- [10] B. Einfeldt. *On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics*. SIAM J. Numer. Anal., v25, n2, pp 294-318, 1988.
- [11] L. Fraccarollo, and E. F. Toro. *A Shock-Capturing Method for Two Dimensional Dam-Break Problems*. Proceedings of the Fifth International Symposium in Computational Fluid Dynamics, Sendai, Japan, 1993.
- [12] R. F. French, (1994) *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, Inc., 739 pp.
- [13] S. K. Godunov. *A finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*. Mat. Sb., v47, pp357-393, 1959.
- [14] A. Harten, P. D. Lax, B. Van Leer. *On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. SIAM Review, v25, pp 35-61, 1983.
- [15] T. Y. Hou and P. LeFloch. *Why Non-Conservative Schemes Converge to the Wrong Solutions : Error Analysis*. Math. Of Comput, v62, pp497-530, 1994.
- [16] Fang Q. Hu, M. Y. Hussaini, P. Rasetarinera. *An Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation Problems..* Journal of Computational Physics, v.151, pp.921-946, 1999.

- [17] K. Hu, C. G. Mingham, D. M. Causon. *A Bore-Capturing Finite Volume Method for Open-Channel Flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v.28, pp.1241-1261, 1998.
- [18] M.J. Ivings, D. M. Causon, E. F. Toro. *On Riemann Solvers for Compressible Liquids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v.28, pp.395-418, 1998.
- [19] P. D Lax, B. Wendroff. *Systems of Conservation Laws*. Comm. Pure Appl. Math, v13, pp 217-237, 1960.
- [20] E. Marshall, R. Mendez. *Computational Aspects of the Random Choice Method for Shallow Water Equations*. Journal of computational physics, V39, pp1-21, 1981.
- [21] A. Mohamadian. *Simulation of Shallow Resirculation Flows with Variable Topography Using Upwind Schemes on Unstructured Grid*. Sharif University of Technology, Iran
- [22] J. N Reddy, (1993) *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd Edition. McGraw-Hill, Inc.
- [23] S. Soares Frazao, X. Sillen, Y. Zech. *Dam-Break Flow Through Sharp Bends Physical Model and 2D Boltzmann Model Validation*. Université Catholique de Louvain & Fonds National de la Recherche Scientifique.
- [24] A. Soulaïmani, M. Idrissi, *Identification of Friction Coefficient in Shallow Water Flows using Optimal Control Theory*. International Journal of Computational Fluid Dynamics, v12, pp29-40, 1999.

- [25] A. Soulaïmani, (1983) *Nouveau Aspects de l'Application de la Méthode des Éléments finis en Hydraulique*. Thèse de maîtrise. Publication de l'Université Laval.
- [26] E. F. Toro. *Riemann Problems and The WAF Method for Solving Two-Dimensional Shallow Water Equations*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A338, pp 43-68, 1992.
- [27] E. F. Toro, (1999) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction* : 2nd Edition.
- [28] E. F. Toro, (2001) *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley edition.
- [29] E. F. Toro, M. Spurce and W. Spears. *Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver*. Shock Waves, v4, pp25-34, 1994.
- [30] J. S. Wang, H. G. Ni, Y. S. He. *Finite-Difference TVD Scheme for Computation of Dam-Break Problems*. Journal of Hydraulic Engineering, v.126, n.4, pp.253-261, 2000.
- [31] B. Van Leer, J. L. Thomas, P. L. Roe. *A Comparaison of Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations*. AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference, June 9-11, 1987, Nonolulu, Hawaii. Paper AIAA-87-1104-CP, 1987.
- [32] G. Watson, D. H. Peregrine, and E. F. Toro. *Numerical Solution of the Shallow*

Water Equations on a Beach Using the Weighted Average Flux Method. In Computational Fluid Dynamics, v1, pp 495-502, Elsevier, 1992.

- [33] B. Zanuttigh, A. Lamberti. *Exact Riemann Solution and Weighted Average Flux Method for Power-law Channel Section.* International Journal of Computational Fluid Dynamics, v.16, n.3, pp.155-169, 2001.